Vlastnosti diferencovateľných funkcií

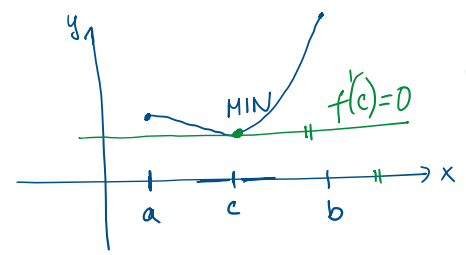
utorok 27. októbra 2026 8:26

↓ má deriváciu na istej množine

Veta

Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ nadobúda vo vnútornom bode c intervalu $\langle a, b\rangle$ najväčšiu (najmenšiu) hodnotu. Ak navyše funkcia f má v bode c deriváciu, tak $f'(c) = 0$.

DÔKAZ:



predpoklad
$f(c) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$

$\forall x \in \langle a,b\rangle$
$f(x) \geq f(c)$
$f(x) - f(c) \geq 0$

predpoklad $c \in (a,b)$
nech existuje $f'(c)$

rozpíšem:



nech $x > c$
$x - c > 0$
podiel $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \geq 0$

$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ aj

nech $x < c$
podiel $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \leq 0$
$x - c < 0$

$f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ aj

máme
$f'_+(c) \geq 0$
$f'_-(c) \leq 0$
ale $f'(c)$ existuje, teda
$f'(c) = 0$

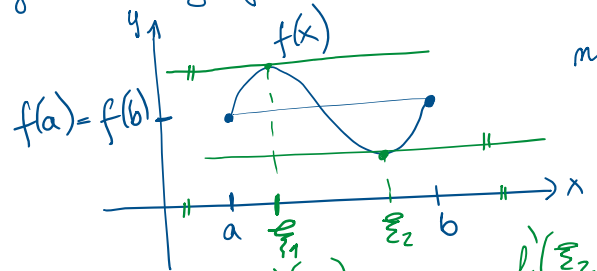
Veta (Rolleho veta)

Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

- *Je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$.*
- *Má deriváciu na otvorenom intervale (a, b).*
- *Platí $f(a) = f(b)$.*

Potom na otvorenom intervale (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ taký, že $f'(\xi) = 0$.

geometrický význam Rolleho vety:



$f'(\xi_1) = 0$ $\quad f'(\xi_2) = 0$

max. $f(x) = \text{konštanta}$

Veta (Lagrangeova veta)

Nech funkcia f má tieto vlastnosti:

- *Je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$.*
- *Má deriváciu na otvorenom intervale (a, b).*

Potom na otvorenom intervale (a, b) existuje aspoň jeden bod ξ taký, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

⇐ predpoklady: f spojitá na $\langle a,b\rangle$
f má deriváciu na (a,b)
potom existuje $\xi \in (a,b)$ taký
$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

taký, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

↓ veta o prírastku funkcie

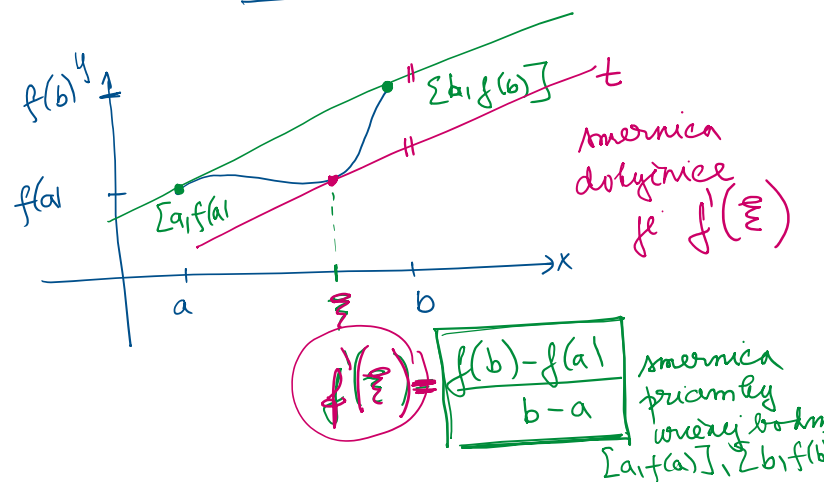
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ /\cdot(b-a)$$

resp. $$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$$

geometrický význam Lagrangeovej vety

↓

existuje bod, v ktorom dotyčnica je rovnobežná s priamkou, ktorá prechádza bodmi $[a,f(a)]$ $[b,f(b)]$



smernica dotyčnice je $f'(\xi)$

$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ smernica priamky ktorej bodmi $[a,f(a)]$, $[b,f(b)]$