PRIEBEH FUNKCIE – použitie derivácie funkcie pri určovaní vlastností funkcií

streda 28. októbra 2026 6:53

VÝZNAM ZNAMIENKA 1. derivácie pri určovaní monotónnosti funkcie:

Veta

Nech funkcia f má na otvorenom intervale I deriváciu. Potom ak pre každé $x \in I$ je

a) $f'(x) > 0$, *tak f je rastúca na I.*

b) $f'(x) < 0$, *tak f je klesajúca na I.*

c) $f'(x) \geq 0$, *tak f je neklesajúca na I.*

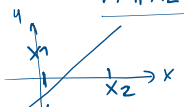
d) $f'(x) \leq 0$, *tak f je nerastúca na I.*

d) $f'(x) = 0$, *tak f je konštantná na I.*

dôkaz tvrdenia c)

predpoklady: f má deriváciu na J, $\forall x \in J$, $f'(x) \geq 0$.

{ pripomienka: definícia neklesajúcej funkcie: $\forall x_1, x_2 \in J$; $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ }



Lagrangeova veta
1. f je spojitá na $\langle x_1, x_2 \rangle$
2. f má deriv. na (x_1, x_2)
Potom $\exists c \in (x_1, x_2)$
$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

vezmime ľubovoľné $x_1, x_2 \in J$, také že $x_1 < x_2$. Interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ je f spojitá ✓
(x_1, x_2) f má deriváciu ✓

sú splnené predpoklady Lagr. vety, teda existuje $c \in (x_1, x_2)$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$f'(c) \geq 0$, $(x_2 - x_1) > 0$

teda $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$f(x_2) \geq f(x_1)$ resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$

teda ukázali sme, že ak $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in J$, tak f je neklesajúca na J.

Príklad Určme intervaly monotónnosti danej funkcie

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$$

v príkladoch rastúcnosť ak $f'(x) > 0$
klesajúcnosť ak $f'(x) < 0$

hľadáme $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$

určím nulové body prvej derivácie

$(x-1)(x+3) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = -3$

$\mathcal{D}(f)$	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

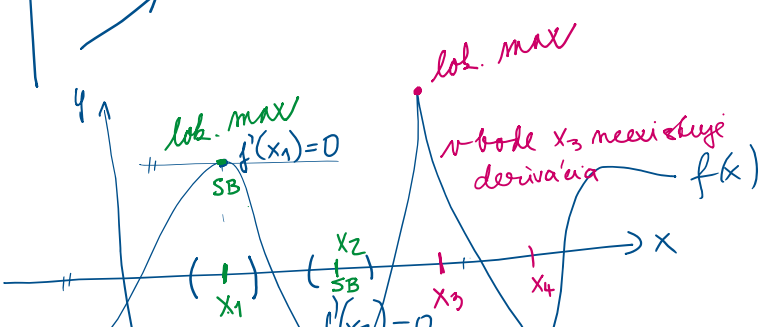
f(x) rastie na intervaloch $(-\infty, -3)$, $(1, \infty)$
klesá na intervale $(-3, 1)$.

LOKÁLNE EXTRÉMY FUNKCIE

Definícia

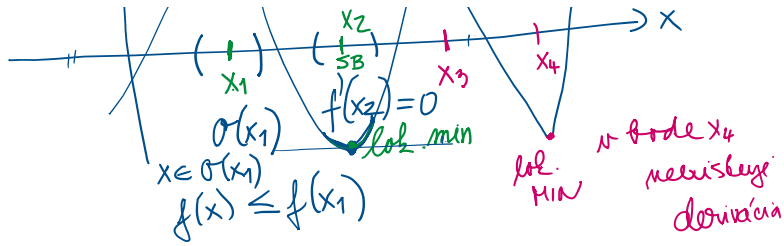
Nech funkcia f je definovaná na otvorenom intervale I. Hovoríme, že funkcia f má v bode $x_0 \in I$ lokálne maximum (lokálne minimum) ak existuje prstencové okolie $O^o(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^o(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Ak platia iba ostré nerovnosti má funkcia v bode x_0 ostré



(lokálne minimum) ak existuje prstencové okolie $O^\circ(x_0)$ také, že pre všetky $x \in O^\circ(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Ak platia iba ostré nerovnosti má funkcia v bode x_0 ostré lokálne maximum (ostré lokálne minimum).



- f má v bode $x_0 \in D$ lok. maximum, ak existuje $O^\circ(x_0)$ také, že $\forall x \in O^\circ(x_0)$ platí $f(x) \leq f(x_0)$
- f má v bode $x_0 \in D$ lok. minimum, ak existuje $O^\circ(x_0)$ také, že $\forall x \in O^\circ(x_0)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.

Veta (nutná podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech existuje $f'(x_0)$. Ak funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$.

nutná podmienka existencie lokálneho extrému: ak existuje $f'(x_0)$ a v bode x_0 má f extrém, tak $f'(x_0) = 0$!

⇓

funkcia môže mať lokálny extrém iba v bodoch, kde derivácia $= 0$, resp. v bodoch, kde derivácia neexistuje!

POZNÁMKA: STACIONÁRNE BODY (x_0) sú body, kde $f'(x_0) = 0$.

SB ... skratka pre stacion. bod.

---

1. Ak f' mení znamienko z $+$ na $-$ má funkcia v bode x_0 lokálne maximum.
   Ak f' mení znamienko z $-$ na $+$ má funkcia v bode x_0 lokálne minimum.

2. Nech x_0 je stacionárnym bodom funkcie f a nech existuje $f''(x_0)$. Potom ak
   a) $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.
   b) $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.