minule (opakovanie)

- Def. derivácie funkcie v bode x_0 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ resp. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$
- pravidlá pre derivovanie súčinu $[f(x).g(x)]'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$
- + derivačné vzorce pre elementárne funkcie $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

$[f(g(x))]'=f'(g(x)).g'(x)$ ↑ dokázali sme

dôkazy niektorých pravidiel a vzťahov

① dôkaz derivácie súčinu $[f(x).g(x)]'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

ľubovoľné $x\in J$ a počítam deriváciu funkcie $f(x).g(x)$ podľa definície

$$[f(x).g(x)]' \overset{\text{definícia derivácie}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\boxed{-f(x).g(x+h)+f(x)g(x+h)}-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\left(f(x+h)-f(x)\right)+f(x)\left(g(x+h)-g(x)\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[g(x+h)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=$$

($g(x)$, $f'(x)$, $f(x)$, $g'(x)$)

$=g(x).f'(x)+f(x).g'(x)$ ☺

$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

② dôkaz derivácie podielu: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ $\forall x\in J$

pomocný vzťah: $\boxed{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)}$

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' \overset{\text{definícia derivácie v bode } x}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h).g(x)\,h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{g(x)g(x+h)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=\boxed{-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)}$$ ☺

($g(x)$, $g(x)$, $g'(x)$)

ideme dokázať $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]'\overset{\text{podľa pravidla pre derivovanie súčinu}}{=}f'(x).\frac{1}{g(x)}+f(x).\boxed{\left[\frac{1}{g(x)}\right]'}=$

$\boxed{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}$ OK

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)\right) = \boxed{\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

pravidlo pre derivovanie súčinu — O.K ☺

dôkazy derivácií niektorých elementárnych funkcií:

platí • $[\sin x]' = \cos x$ lebo $[\sin x]' \underset{\text{definícia derivácie}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$ (α, β)

použijeme vzťah $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\frac{2x+h}{2} =$$

$\frac{h}{2}$ → 1

platí vzťah $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} = \cos x$

$= 1\cdot\cos x = \cos x$ ☺

dokázali sme $[\sin x]' = \cos x$

platí • $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ lebo $[\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' =$

$$\underset{\text{derivácia podielu}}{=} \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}}{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$ ☺

platí • $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ použijeme: $\ln x$ je inverzná k $f(x) = e^x$

pre deriváciu inverznej funkcie platí $\boxed{[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$

$f^{-1}(x) = \ln x$

$$[f^{-1}(x)]' = [\ln x]' \underset{\text{derivácia inverznej}}{=} \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$ ☺

$\boxed{e^{\ln x} = x}$ $\boxed{\ln e^x = x}$

PRÍKLADY: ① $f(x) = (x^3+4x)\cdot\cos x$ použijeme $[f\cdot g]' = f'\cdot g + f\cdot g'$, $[f\pm g]' = f'\pm g'$

$f'(x) = (x^3+4x)'\cdot\cos x + (x^3+4x)\cdot(\cos x)' =$

$= (3x^2+4)\cdot\cos x + (x^3+4x)\cdot(-\sin x)$

použijem ďalej $[x^\alpha]' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $[x]' = 1$, $[\cos x]' = -\sin x$

② $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^4 - 6x^2}$ použijeme $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

$[x^\alpha]' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

$x^4 - 6x^2$

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{tg}x)'\cdot(x^4-6x^2) - \operatorname{tg}x\cdot(x^4-6x^2)'}{(x^4-6x^2)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(x^4-6x^2) - \operatorname{tg}x\,(4x^3-12x)}{(x^4-6x^2)^2}$$

$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$ $\quad [\operatorname{tg}x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad [x^\alpha] = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

(3) $f(x) = \ln(\sin 3x)$

3 zložky: $\ln x$, $\sin x$, $3x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin 3x}\cdot(\sin 3x)' = \frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x\cdot 3$$

$3 = (3x)'$

použijeme $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$[\ln x]' = \frac{1}{x}$ $\quad [\ln\square]' = \frac{1}{\square}\cdot\square'$ $\quad [\sin x]' = \cos x$ $\quad [\sin\square]' = \cos\square\cdot\square'$

(4) a) $f(x) = x^4$ $\quad f'(x) = 4x^3$

b) $g(x) = 4^x$ $\quad g'(x) = 4^x\cdot\ln 4$

b) $[a^x]' = a^x\cdot\ln a$

a) $[x^\alpha]' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

(5) $f(x) = x^x$ ani a) ani b)

↓ prípad $(f(x))^{g(x)}$

PREPIS $(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$

↓ toto tvar už viem derivovať, je to zložená funkcia

použijem $e^{\ln\square} = \square$

$[e^\square]' = e^\square\cdot\square'$

prvá úloha $[x^x]'$

najprv prepíšem $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$ a derivujem toto tvar

$$[e^{x\ln x}]' = e^{x\ln x}\cdot[x\cdot\ln x]' = e^{x\ln x}\cdot\left((x)'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'\right) =$$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$$= e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

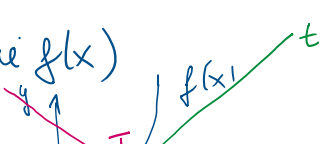
2. NAČO SA UČÍME DERIVOVAŤ?

Význam derivácie VEĽKÝ uvediem niektoré APLIKÁCIE (použitie derivácie funkcie)

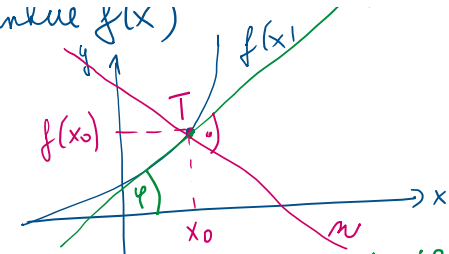
GEOMETRICKÝ VÝZNAM DERIVÁCIE:

Ak existuje $f'(x_0)$, potom dotyčnica ku grafu funkcie $f(x)$

$T\,[x_0, f(x_0)]$ má tvar



Ak existuje $f'(x_0)$, potom dotyčnica ku grafu funkcie $f(x)$ v bode $T=[x_0; f(x_0)]$ má tvar



$$t: \quad y - f(x_0) = \boxed{f'(x_0)}(x - x_0)$$

k_t

smernica dotyčnice je derivácia funkcie v dotykovom bode.

smernica dotyčnice $= \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$

rovnica normály je (priamka kolmá na dotyčnicu a prechádza bodom $[x_0; f(x_0)]$)

$$n: \quad y - f(x_0) = \boxed{-\frac{1}{f'(x_0)}}(x - x_0)$$

k_n

$f'(x_0) \neq 0$

príklad: Určme rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = x^3 - 2x$ v bode $T=[1; ?]$.

použijem:

$$t: \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$x_0 = 1$ ✓

$f'(x_0) =$

$f(x_0) = [x^3 - 2x]_{x=1} = -1$ ✓ $\quad T=[1,-1]$

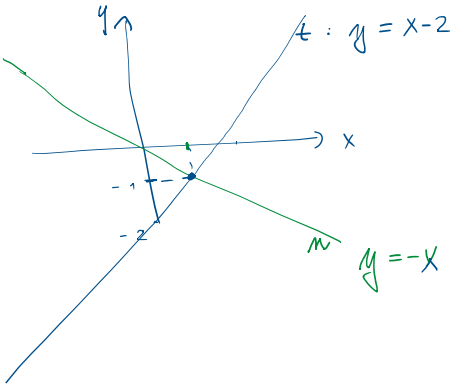
$f'(x) = 3x^2 - 2$

$f'(x_0 = 1) = [3x^2 - 2]_{x=1} = 1$ ✓ → smernica dotyčnice

$t: \quad y - (-1) = 1(x - 1)$

$y + 1 = x - 1$

$t: \quad y = 1 \cdot x - 2$ → smernica dotyčnice



použijem: $n: \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

dosadím $x_0, f(x_0), f'(x_0)$

$n: \quad y - (-1) = -\frac{1}{1}(x - 1)$

$y + 1 = -1 \cdot x + 1$ → smernica normály

$n: \quad \boxed{y = -x}$

ĎALŠÍ VÝZNAM DERIVÁCIE FUNKCIE — POČÍTANIE LIMÍT
l'HOSPITALOVO PRAVIDLO

ĎALŠÍ VÝZNAM DERIVÁCIE FUNKCIE – POČÍTANIE LIMÍT
L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Čo musíte vedieť: derivácie elementárnych funkcií, $(f \cdot g)'$, $\left(\frac{f}{g}\right)'$, $[f(g(x))]'$ = na cvičeniach

+ rovnica dotyčnice +
+ rovnica normály.