

Základy fuzzy množín

Označenie a použité vlastnosti:

- **Fuzzy množina** A na univerze X je popísaná funkciou príslušnosti $\mu_A : X \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$.
- **Obor hodnôt** je $\text{Range}(A) = \{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : \exists x \in X, \mu_A(x) = \alpha\}$.
- **Výška** je $h(A) = \sup \text{Range}(A)$. Fuzzy množina je **normálna**, ak $h(A) = 1$, inak je **subnormálna**.
- **Nosič** je $\text{Supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ a **jadro** je $\text{core}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$.
- Fuzzy množina je **konečná**, ak je jej nosič konečný, inak je **nekonečná**.
- α -**rez** je $R_A(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ pre $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, najmä $R_A(0) = X$. Systém všetkých α -rezov je **horizontálna reprezentácia** množiny A , funkcia príslušnosti μ_A je jej **vertikálna reprezentácia**.
- **Veta o systéme rezov**: zobrazenie $M : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je systémom rezov nejakej fuzzy množiny práve vtedy, keď

$$(R1) \quad M(0) = X,$$

$$(R2) \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) \subseteq M(\alpha),$$

$$(R3) \quad 0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{\alpha < \beta} M(\alpha).$$

Vtedy je $\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle : x \in M(\alpha)\}$.

Zadania úloh

Príklad 1: Konečné univerzum

Na univerzu $X = \{a, b, c, d\}$ je daná fuzzy množina $\mu_A = \{(a, 0.3), (b, 1), (c, 0.5)\}$. Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 2: Konečné univerzum

Na univerzu $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ je daná fuzzy množina $\mu_B = \{(a, 0.2), (b, 0.6), (d, 0.4), (f, 0.8)\}$. Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 3: Konečné univerzum

Na univerzu $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ je daná fuzzy množina $\mu_C = \{(a, 0.1), (c, 0.5), (d, 0.3), (e, 0.6)\}$. Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 4: Diskrétna fuzzy množina na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pre } x = 3, \\ 1 & \text{pre } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pre } x = 5, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 5: Spojitá funkcia príslušnosti na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná fuzzy množina

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0, \\ x & \text{pre } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - x & \text{pre } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 6: Spojitá funkcia príslušnosti na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2x & \text{pre } x \in \langle 0, 0.5 \rangle, \\ 2 - 2x & \text{pre } x \in (0.5, 1), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 7: Ohraničené univerzum, funkcia s dvoma časťami

Na univerzu $X = \langle -3, 3 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 4x - 1.5 & \text{pre } x \in \langle 0.4, 0.6 \rangle, \\ 8 - 5x & \text{pre } x \in \langle 1.4, 1.6 \rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 8: Ohraničené univerzum, odmocnina

Na univerzu $X = \langle -3, 3 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{x} & \text{pre } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 3 - 2x & \text{pre } x \in \langle 1, 1.5 \rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 9: Ohraničené univerzum, funkcia s dvoma časťami

Na univerzu $X = \langle -3, 3 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{pre } x \in \langle 0.5, 0.6 \rangle, \\ 7 - 4x & \text{pre } x \in \langle 1.5, 1.7 \rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 10: Ohraničené univerzum, odmocnina

Na univerzu $X = \langle -3, 3 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x} & \text{pre } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 4 - 3x & \text{pre } x \in \langle 1, 1.25 \rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 11: Ohraničené univerzum, funkcia so skokom

Na univerzu $X = \langle -5, 5 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{pre } x \in \langle 0.5, 1 \rangle, \\ 1.5 - x & \text{pre } x \in (1, 1.5), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 12: Ohraničené univerzum, odmocnina

Na univerzu $X = \langle -5, 5 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x} & \text{pre } x \in \langle 0, 0.25 \rangle, \\ 1.5 - 2x & \text{pre } x \in \langle 0.5, 0.75 \rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 13: Ohraničené univerzum, funkcia s dvoma časťami

Na univerzu $X = \langle -4, 4 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{pre } x \in \langle 0.5, 0.6 \rangle, \\ 4 - 3x & \text{pre } x \in \langle 1, 1.3 \rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 14: Ohraničené univerzum, odmocnina

Na univerzu $X = \langle -4, 4 \rangle$ je daná fuzzy množina

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{pre } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 3 - 2x & \text{pre } x \in \langle 1, 1.25 \rangle, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nájdite jej horizontálnu reprezentáciu a popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 15: Z horizontálnej reprezentácie na konečnom univerze

Množina A má horizontálnu reprezentáciu

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \{a, b, c, d\} & \text{pre } \alpha \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle, \\ \{a, d\} & \text{pre } \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle, \\ \{d\} & \text{pre } \alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle, \\ \emptyset & \text{pre } \alpha \in (\frac{2}{3}, 1 \rangle. \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 16: Z horizontálnej reprezentácie na konečnom univerze

Množina B má horizontálnu reprezentáciu

$$R_B(\alpha) = \begin{cases} \{a, b, c\} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \{a\} & \text{pre } \alpha \in (0, \frac{1}{2} \rangle, \\ \{a, b\} & \text{inak.} \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 17: Z horizontálnej reprezentácie na konečnom univerze

Množina C má horizontálnu reprezentáciu

$$R_C(\alpha) = \begin{cases} \{a, b\} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \{a\} & \text{pre } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ \emptyset & \text{inak.} \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 18: Z horizontálnej reprezentácie na $\mathbb{R}$

Množina A má horizontálnu reprezentáciu

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \langle \alpha^2, 1 \rangle & \text{inak.} \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 19: Z horizontálnej reprezentácie na $\mathbb{R}$

Množina B má horizontálnu reprezentáciu

$$R_B(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } \alpha = 0, \\ (\alpha^2, 1) & \text{inak.} \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 20: Z horizontálnej reprezentácie na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná horizontálna reprezentácia množiny A predpisom

$$R_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \langle \sqrt{2\alpha - 1}, 6 - 5\alpha \rangle & \text{pre } \alpha \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \\ \langle 0, 6 - 5\alpha \rangle & \text{pre } \alpha \in (0, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 21: Z horizontálnej reprezentácie na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná horizontálna reprezentácia množiny B predpisom

$$R_B(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \langle 0, 1 - \frac{\alpha}{2} \rangle & \text{pre } \alpha \in (0, \frac{1}{2}), \\ \langle \frac{\sqrt{2\alpha - 1}}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2} \rangle & \text{pre } \alpha \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.

Príklad 22: Z horizontálnej reprezentácie na $\mathbb{R}$

Na univerzu $X = \mathbb{R}$ je daná horizontálna reprezentácia množiny C predpisom

$$R_C(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } \alpha = 0, \\ \langle \alpha^2 + 1, \frac{5-\alpha}{2} \rangle & \text{pre } \alpha \in (0, 1). \end{cases}$$

Ak existuje jej vertikálna reprezentácia, tak popíšte jej obor hodnôt, výšku, normálnosť, konečnosť, nosič a jadro.