# Matematika 1 – 8.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Monotónnosť funkcie a extrémy funkcie

**Monotónnosť funkcie –** vypočítame prvú deriváciu funkcie na základe nej určíme monotónnosť a extrémy:

na intervaloch, kde $f(x)' > 0$ je funkcia $f(x)$ rastúca $\nearrow$

na intervaloch, kde $f(x)' < 0$ je funkcia $f(x)$ klesajúca $\searrow$

*Monotónnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých* $\boldsymbol{f(x)' = 0}$ *alebo v bodoch, v ktorých* $\boldsymbol{f(x)'}$ ***neexistuje****.*

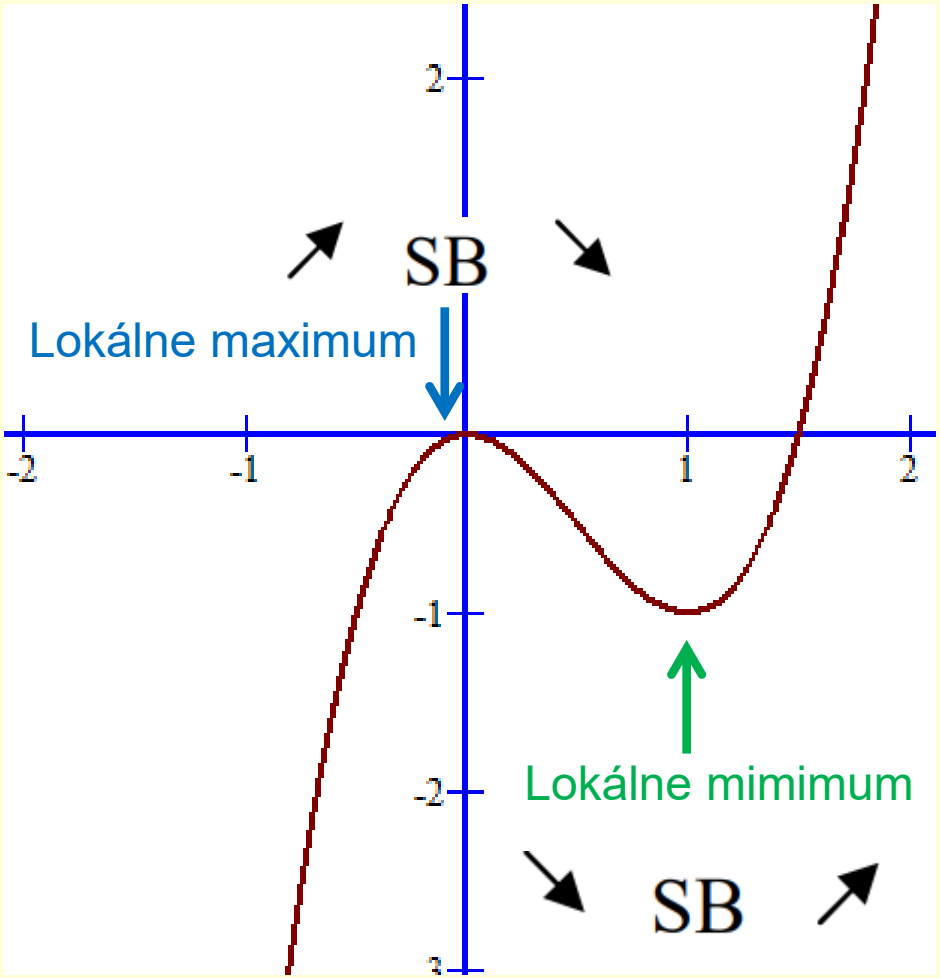
**Stacionárne body (SB) –** body, v ktorých je $\boldsymbol{f(x)' = 0}$

Lokálne maximum – ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá

$$\nearrow \ \mathbf{SB} \ \searrow$$

Lokálne minimum – ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie

$$\searrow \ \mathbf{SB} \ \nearrow$$


2
SB
Lokálne maximum
-2
-1
1
2
-1
-2
Lokálne mimimum
SB

**Postup pri určení intervalov monotónnosti:**

1. určíme definičný obor
2. vypočítame prvú deriváciu funkcie
3. prvú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je $f(x)' = 0$ – stacionárne body
4. určíme bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje
5. stacionárne body a bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme monotónnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme lokálne extrémy funkcie

# Konvexnosť, konkavnosť funkcie a inflexné body

**Konvexnosť a konkávnosť funkcie –** vypočítame druhú deriváciu funkcie

na intervaloch, kde $f(x)'' > 0$ je funkcia konvexná – ∪

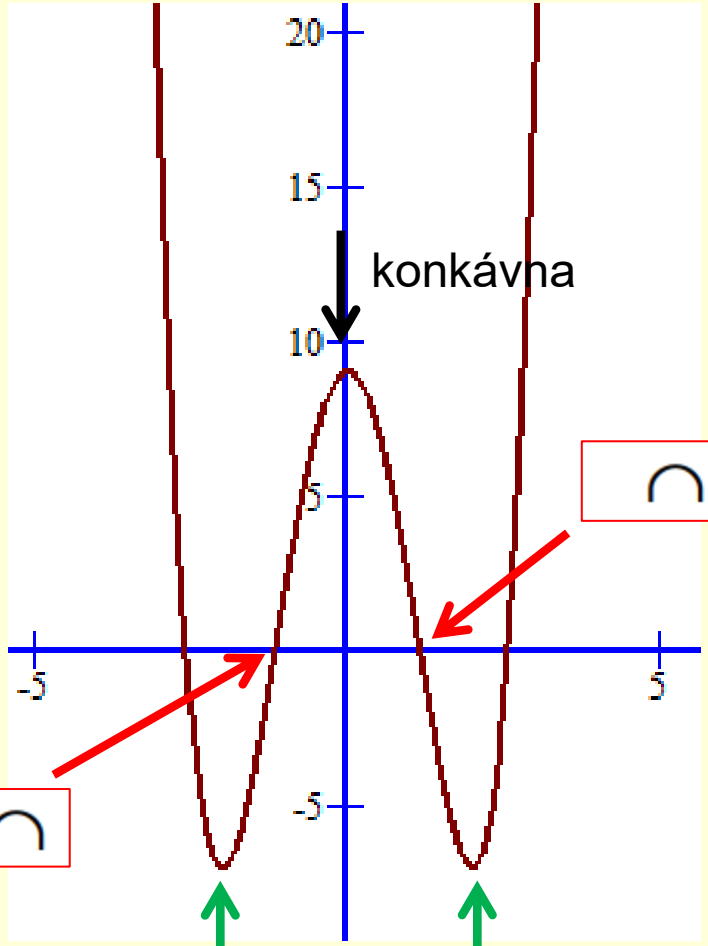
na intervaloch, kde $f(x)'' < 0$ je funkcia konkávna – ∩

*Konvexnosť a konkávnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých* $\boldsymbol{f(x)'' = 0}$ *alebo v bodoch, v ktorých druhá derivácia funkcie* $f(x)''$ *neexistuje.*

**Inflexné body (IB) –** body, v ktorých je $\boldsymbol{f(x)'' = 0}$ a sa v nich mení konvexnosť a konkávnosť






∩ IB ∪

∪ IB ∩

konvexná

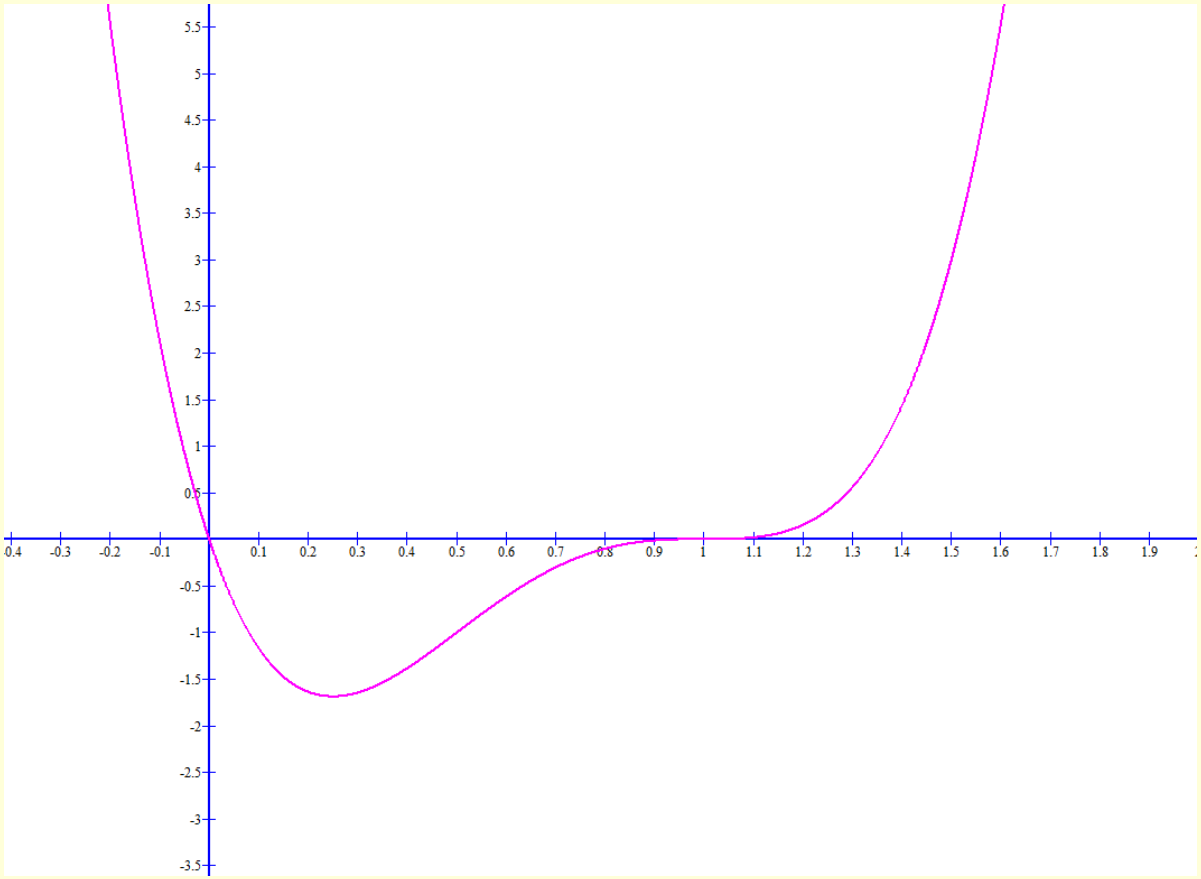
konvexná

**Postup pri určení intervalov pre konvexnosť a konkávnosť:**

1. určíme definičný obor
2. vypočítame druhú deriváciu funkcie
3. druhú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je nulová
4. určíme bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje
5. body, v ktorých je druhá derivácia nulová a bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme infexné body funkcie

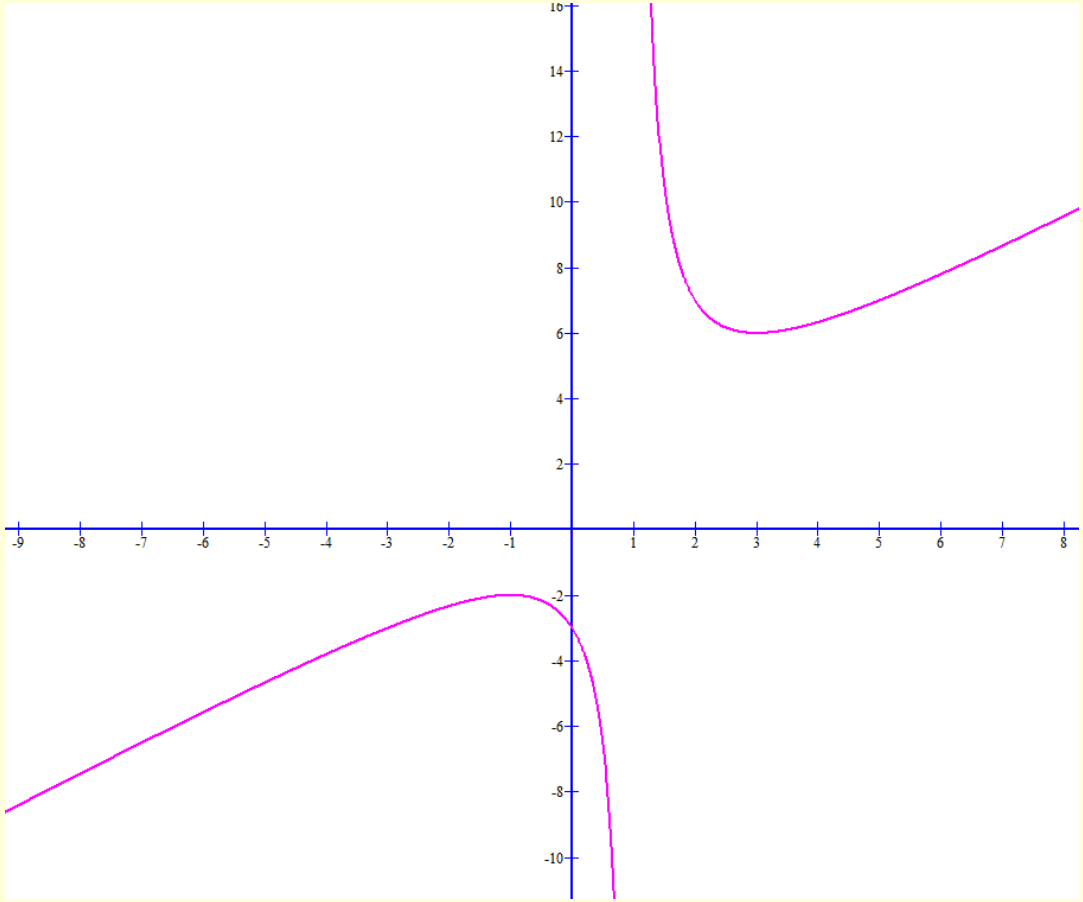
**Pr. 1** – 47 / 4: Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = 16x(x-1)^3$$



**Pr. 2**: Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$



**Pr. 3** – 47 / 2: Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

## Určenie monotónnosti

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať prvú deriváciu funkcie

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 3x(x + 2)$$

3. určiť $y' = 0$ a stacionárne body (SB)

$$3x(x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x = 0 \quad \text{V} \quad (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{V} \quad x = -2$$

**SB:** $-2, 0$

4. určiť bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje - taký bod funkcia nemá

5. pomocou stacionárnych bodov a bodov, v ktorých prvá derivácia neexistuje, rozdeliť definičný obor na intervaly

| | $(-\infty, -2)$ | $-2$ | $(-2,0)$ | $0$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | SB | - | SB | + |
| | ↗ | lok. max | ↘ | lok. min | ↗ |

6. zistiť znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určiť monotónosť funkcie na intervaloch

$y' = 3x(x+2)$: pre x = - 3 znamienko +, pre x = -1, znamienko - , pre x = 1, +

**funkcia rastie na intervale $(-\infty, -2)$ a $(0, \infty)$ a klesá na $(-2, 0)$**

7. nájsť lokálne extrémy funkcie

lokálne maximum je v bode $[-2,2]$ lokálne minimum je v bode $[0, -2]$

$y(-2) = x^3 + 3x^2 - 2 = (-2)^3 + 3.(-2)^2 - 2 = 2$

## Určenie konkávnosti a konvexnosti

1. určiť definičný obor D(*f*) = R

2. vypočítať druhú deriváciu funkcie

$$y'' = (3x^2 + 6x\ )' = 6x + 6$$

3. určiť $y'' = 0$ $\quad y'' = 6x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

4. určiť bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje - taký bod funkcia nemá

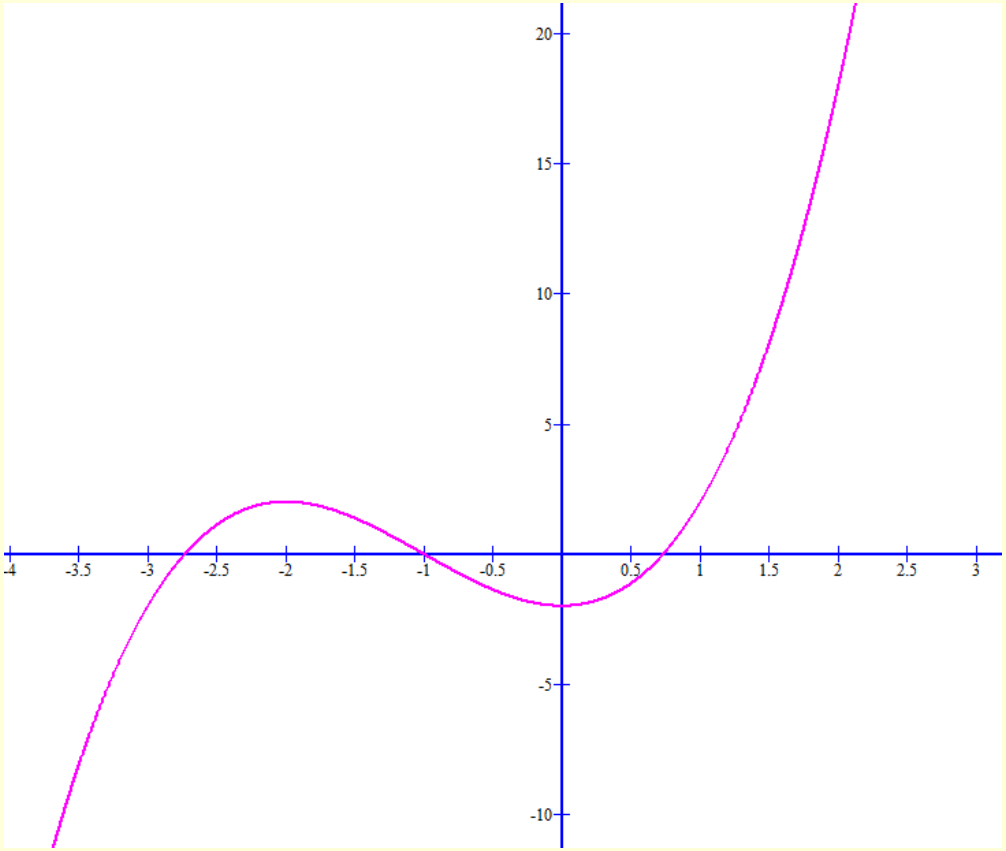
5. rozdeliť definičný obor na intervaly pomocou bodov, v ktorých je druhá derivácia nulová alebo neexistuje

| | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | - | | + |
| | ∩ | IB | ∪ |

6. zistiť znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť

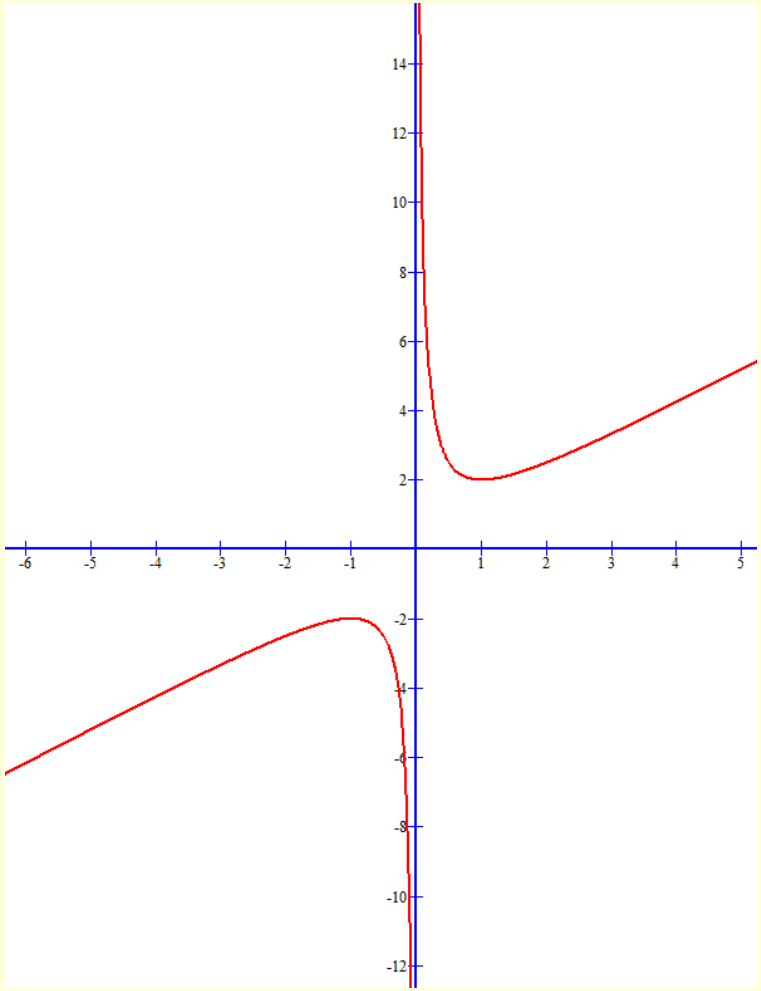
**funkcia je konvexná na** $(-1, \infty)$ **a konkavná na intervale** $(-\infty, -1)$

7. Určiť inflexné body funkcie inflexný bod má funkcia v $[-1,0]$


20
15
10
5
-5
-10
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3

**Pr. 4** – 47 / 7: Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$



**Pr. 5**: Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = \frac{4}{4 - x^2}$$

## Určenie monotónnosti

D(*f*) = $R - \{\pm 2\}$, $4 - x^2 \neq 0$

$$y' = \frac{0.(4 - x^2) - 4.(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{8x}{(4 - x^2)^2}$$

$$y' = \frac{8x}{(4 - x^2)^2}$$ vždy kladné

znamienko $y'$ závisí iba od znamienka výrazu v čitateli

$y' = \frac{8x}{(4-x^2)^2} = 0 \rightarrow 8x = 0$, **SB:** $x = 0$

$4 - x^2 \neq 0 \rightarrow$ body, v ktorých $y'$ neexistuje, BN: $x = \pm 2$

| | $(-\infty, -2)$ | -2 | $(-2,0)$ | 0 | $(0,2)$ | 2 | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | - | BN | - | SB | + | BN | + |
| $y$ | ↘ | | ↘ | lok. min | ↗ | | ↗ |

**funkcia rastie na $(0, 2)$, $(2, \infty)$ a klesá na $(-2, 0)$, $(0, 2)$**

lokálne extrémy funkcie - lokálne minimum je v bode $[0,1]$

## Určenie konkávnosti a konvexnosti

D(*f*) = $R - \{\pm 2\},\ 4 - x^2 \neq 0$

$$y'' = \frac{8.(4-x^2)^2 - 8x.2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4} = \frac{8.(4-x^2)(4-x^2+4x^2)}{(4-x^2)^2} = \frac{8.(4+3x^2)}{(4-x^2)^2}$$

$y'' = \frac{8.(4+3x^2)}{(4-x^2)^2} = 0 \ \rightarrow 4 + 3x^2 = 0$, nenastane **SB:** nemá

$4 - x^2 \neq 0 \rightarrow$ body, v ktorých $y''$ neexistuje, BN: $x = \pm 2$

| | $(-\infty, -2)$ | **-2** | $(-2,2)$ | **2** | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | - | BN | + | BN | - |
| $y$ | ∩ | | ∪ | | ∩ |

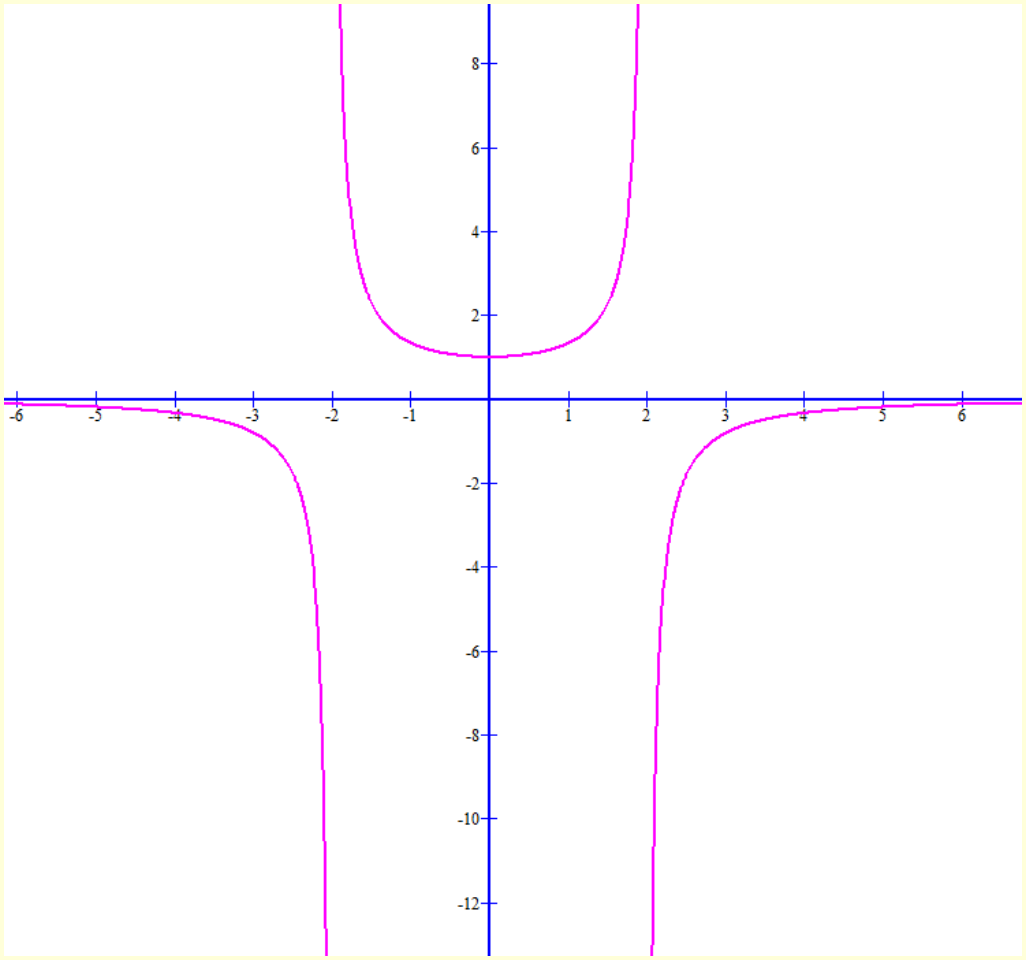
$$y'' = \frac{8.(4+3x^2)}{(4-x^2)^2}$$

vždy kladné

znamienko $y''$ závisí iba od znamienka výrazu v menovateli

**funkcia konkávna na** $(-\infty, -2), (2, \infty)$ **a konvexná na** $(-2, 2)$

inflexný bod - nemá


8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6

**Pr. 6** – 47 / 11: Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = x - \frac{1}{x}$$

## Určenie monotónnosti

D(*f*) = $R - \{0\}$, $x \neq 0$

$$y' = (x - x^{-1}{}') = 1 - (-1).x^{-2} = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$y' = \frac{x^2+1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0$ nikdy nenastane, **SB:** nemá

$x^2 \neq 0 \rightarrow$ bod, v ktorom $y'$ neexistuje, BN: $x = 0$

| | $(-\infty, 0)$ | **0** | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | + | BN | + |
| $y$ | ↗ | | ↗ |

$y' = \frac{x^2+1}{x^2}$ vždy kladné

**funkcia rastie celom D(f)**

lokálne extrémy funkcie - nemá, lebo $x = 0$ je BN, nie je SB

## Určenie konkávnosti a konvexnosti

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)' = 0 - \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow \; x^3 \neq 0$$

$-\frac{2}{x^3} = 0$ nikdy nenastane,

$x \neq 0 \rightarrow$ bod, v ktorom $y''$ neexistuje, BN: $x = 0$

| | $(-\infty, 0)$ | **0** | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | + | | - |
| | ∪ | BN | ∩ |

**funkcia je konkávna na** $(\mathbf{0}, \infty)$ **a konvexná na intervale** $(-\infty, \mathbf{0})$

inflexný bod - nemá

Dú – 47 / 1, 5, 6, 8, 9,12, 13, 16

1. **zápočtová písomka - informácie:**
   na cvičení 19.11.2026 (9. týždeň) štvrtkové cvičenia
   na cvičení 24.11.2026 (10. týždeň) utorkové cvičenie

písomka: 45 bodov (príklady) + 15 bodov (teória)
7 príkladov – vzorová písomka na
https://kmti.fei.tuke.sk/sites/default/files/2026-09/1.ZPMAT1vzorovezadanie2026.pdf

**Okruhy:** 1. definičný obor funkcie
2. derivácia funkcie bez ďalších úprav
3. rovnica dotyčnice a normály
4. limita funkcie
5. asymptota so smernicou, asymptota bez smernice
6. párnosť a nepárnosť, intervaly monotónosti a lokálne extrémy funkcie
7. intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexné body funkcie

**Teória:** všetko z prednášok (1. - 8. prednáška +tabule) na
https://kmti.fei.tuke.sk/predmet/matematika-i v časti **prílohy**

**Doniesť lsic, písacie potreby, dvojhárok s vytlačenou hlavičkou!**
Ak tlačíte dvojhárok A3:
https://kmti.fei.tuke.sk/sites/default/files/2022-05/FEI-Dvojharok-Hlavicka-M1-%28A3%29.pdf
Ak tlačíte A4 a nalepíte na dvojhárok:
https://kmti.fei.tuke.sk/sites/default/files/2022-05/FEI-Dvojharok-Hlavicka-M1-%28A4%29.pdf