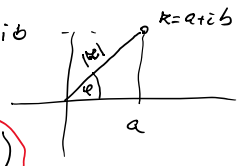
# FUNKCIA KOMPLEXNEJ PREMENNEJ (FKP)

K.Č

$i$: $i^2 = -1$

$z = a + ib$

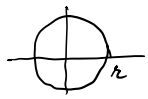



$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z = |z| e^{i\varphi}$

$|z|$ ... modul k.č.
vzdialenosť od začiatku

$|z| = r$ kružnica




$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$z = r\cos t + i r\sin t$

$z(t) = r e^{it}$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

→ krivka v K.Č. $z = \gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ $t \in \langle a, b \rangle$

FKP je predpis, ktorý k.č. $z = x + iy$ priradí jedno (alebo viac) k.č. $w = u + iv$

$w = f(z)$ $\quad f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ F2P — ŠTANDARDNÝ TVAR

Príklad

$f(z) = z^2$ FKP jednoznačná fcia

$f(z) = z^{1/2}$ viacznačná fcia

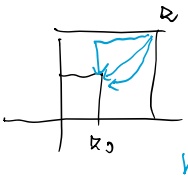
v $\mathbb{R}$: $\sqrt{9} = 3$

v K.Č: $\sqrt{9} = \begin{cases} -3 \\ 3 \end{cases}$

FKP = FTP, F2P

Vyjadrite $f(z) = z^2$ v tvare F2P

$f(x+iy) = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$




$z = x + iy$

$z_0 = x_0 + iy_0$

$z \to z_0 \iff x \to x_0 \wedge y \to y_0$

Vo F2P def.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ LIMITA

a) pre $z \to z_0$ platí, že $f(z) \to l$

b) — " — platí, že $f(z) \to f(z_0)$ fcia spojitá v $z_0$

} FTP

## DERIVÁCIA FKP

Nech $f(z)$ je definované na $O(z_0)$. Derivácia

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Ak $f(z)$ má deriváciu $\Rightarrow$ $f$ - ANALYTICKÁ

$f(z) = z^n$ $\quad f(z) = z^2$ $\quad (z^2)' = 2z$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \overset{(z-z_0)(z+z_0)}{=} \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0$$

ANALYTIC.

$(z^n)' = n z^{n-1}$ ✓ $\quad (e^z)' = e^z$ ? $\quad (\sin z)' = \cos z$ ? $\quad \sin(1+2i) = ?$ $\quad (\cos z)' = -\sin z$ ?

CAUCHY - RIEMANN ove podmienky pre existenciu derivácie

**CAUCHY - RIEMANN** podmienky pre existenciu derivácie

Nech $f'(z_0)$ existuje a počítame ju z toho odkiaľkoľvek

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (F2P)$$

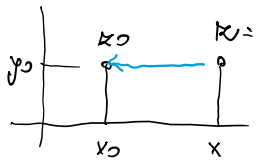
$z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$f(z_0) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0)$

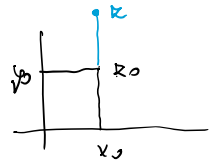
ŠTANDARD.

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} + i \frac{v(x,y) - v(x_0,y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$




$y = y_0$

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left( \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \right)$$




$x = x_0$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ ... $\frac{\partial v}{\partial y}$

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

**Fcia $f$ je ANALYTICKÁ $\iff$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ & $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$** (C-R)

Príklad: Zistite, kde je $f(x+iy) = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i \underbrace{xy}_{v}$ ANALYTICKÁ.

↳ Polynómy

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = x \Rightarrow x = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -y \Rightarrow y = 0$

SE ANALYT. LEN V POČIATKU A NIKDE INDE

$f'(z)$ v FKP je silnejší pojem ako F1P, F2P

↳ ANAL. FCIA BUDE MAŤ ŠPECIÁLNE VLASTNOSTI (viď NASLEDUJÚCA KAP.)

INTEGRÁL FKP (ZRÝCHLENÁ VERZIA)

↳ podobnejšie na def REZIDUUM

Vieme sa biť v KČ $C: z = \gamma(t)$

$t \to$ reál. par.

zápis $\int_C f(z)\,dz$ (Fyz. VEL. PRÁCA)

↳ komplex. číslo

$\int_a^b f(x)\,dx$ = číslo reálne

$z = r\cos t + i\, r\sin t$

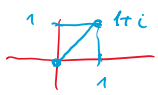
$\gamma(t)$

$t \in \langle 0, 2\pi \rangle$




$z = t + i\,t = \gamma(t)$

$t \in \langle 0, 1 \rangle$




Veta: nech $C: z = \gamma(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Potom

$\int_C f(z)\,dz = \left| \begin{matrix} \text{Substit.} \\ z = \gamma(t) \end{matrix} \right| = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

Vela o výpočte Nech $C: z = \gamma(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Potom

$$\int_C f(z)\,dz = \left| \begin{matrix} \text{Substit.} \\ z = \gamma(t) \\ dz = \gamma'(t)\,dt \end{matrix} \right| = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

KOMP. INT — URČ. INT, KTORÝ OBSAHUJE $i$ → KONŠTANTU — KLASIKA Z MAT 2




Pr. Vyp.

$$\int_C z\,dz \quad \text{ak} \quad C: z = r e^{it} \quad (= r\cos t + i\, r \sin t) \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$= \left| \begin{matrix} z = r e^{it} \\ dz = r i e^{it} \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} r e^{it}\, r i\, e^{it}\,dt = r^2 i \int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt$$

$e^{2it} \to$ kos, kos, $e^{5t} \to$ kos, $e^{2it} \to$ kos, $e^{it} \to$ kos

$$= r^2 i \left[ \frac{e^{2it}}{2i} \right]_0^{2\pi} = r^2 \left( e^{i2\pi} - 1 \right) = 0$$

$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$ (1 a 0)

↳ platí pre všetky pohyby

↳ platí pre všetky uzavreté krivky

ZOVŠEOBECNENIE (CAUCHY)

Nech $C$ je uzavretá jednoduchá krivka. Nech $f(z)$ je analytická na $C$ aj jej vnútri

Potom $\int_C f(z)\,dz = 0$ (overiť na príkladoch)

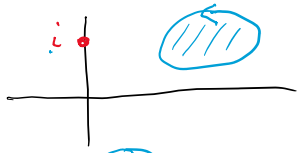
$\int_C \sin z\,dz = 0$ ↳ ANALYT.




$\int_C z^2 \cos z + e^z\,dz = 0$ (AN. F.) NUDA

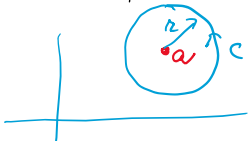
Pr.

$\int_C \frac{1}{z - i}\,dz = 0$




$i$ neleží na $C$ ani vo vnútri

Pr. $\int_C \frac{1}{z - a}\,dz$




$C: z = a + r e^{it}$ $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

↑ kružnica so stredom v $a$ & polomer $r$

$$= \left| \begin{matrix} \text{vela o subst.} \\ z = a + r e^{it} \\ dz = r i e^{it}\,dt \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{it}}{r e^{it}}\,dt = i \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i$$

Ak $f$ má problémový bod vo vnútri $C$, tak $\int_C f(z)\,dz$ už nie je nula (spomíname)

Rozšírenie pôsobí na ďalšiu CAUCHYHO vetu

Najprv definujeme pomocou pojmu PÓL ako VEĽMI PROBLEMATICKÝ BOD

Hovoríme, že

- $a$ je pól prvého rádu funkcie $f(z)$ ak $f(z) = \frac{g(z)}{z - a}$, kde $g(z)$ je analytická (bezproblémová!) funkcia

$f(z) = \frac{1}{z - c}$ $i$ - pól 1. rádu $\quad f(z) = \frac{\sin z}{z - i}$ $i$ - pól 1. rádu $\quad f(z) = \frac{z^2 + z}{z - i}$

- $a$ je pól druhého rádu funkcie $f(z)$ ak $f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^2}$, kde $g(z)$ - analyt. funkcia

$f(z) = \frac{\sin z}{(z - i)^2}$, $f(z) = \frac{1}{(z - i)^2}$, $f(z) = \frac{z^2 + z}{(z - i)^2}$

- $a$ je pól $n$-tého rádu funkcie $f(z)$, ak $f(z) = \frac{g(z)}{\ldots}$ ( $g$ - analyt. f.

$(z-i)^2$

- $a$ je pól $n$-tého rádu funkce $f(z)$, ak $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}$, $g$ - analytická.

Všeobecnejšia prípadová $\int_C \frac{1^{(n)}}{z-a}\,dz = 2\pi i\, g^{(n)}(a)$ $\int_C \frac{g(z)}{z-a}\,dz$ $a$ - jednoduchý pól 1. rádu

$f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$

Veta Nech $f(z)$ je analytická na uzavretej krivke $C$ aj jej vnútri s výnimkou $a \in \mathrm{Int}\, C$, ktorý je pól 1. rádu. Potom

$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{g(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i\, g(a)$ super jednoduchý rozpis

$= 2\pi i\, g(z)\big|_{z=a} = 2\pi i\,(z-a) f(z)\big|_{z=a}$

$= 2\pi i \lim_{z\to a} (z-a) f(z)$

$\parallel$

$\operatorname{res} f(a)$

Reziduum $f$ v $a$ je to špec. limita pre pól 1. rádu

SKRÁTENÁ VERZIA

$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res} f(a)$

$a$ - pól 1. rádu $f$, leží vo vnútri $C$

Pr. $\int_C \frac{z}{z-i}\,dz = 2\pi i \operatorname{res} f(i) = 2\pi i^2 = -2\pi$

$f(z)$

$i$ je pól 1. rádu $\operatorname{res} f(i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{z}{z-i} = i$

$\int_{C_1} \frac{z}{z-i}\,dz = 0$ ✓

Pr. $\int_C \frac{z}{z^2-1}\,dz =$

$z^2-1 = (z-1)(z+1)$

1 aj -1 sú pól. 1. rádu

$1 \in \mathrm{Int}\, C$

$-1 \notin \mathrm{Int}\, C$

nie je proste.

$= 2\pi i \operatorname{res} f(1) = \pi i$

$\operatorname{res} f(1) = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{z}{z^2-1} = \lim_{z\to 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$

$(z-1)(z+1)$

$\int_{C_1} \frac{z}{z^2-1}\,dz = 2\pi i \operatorname{res} f(-1)$

$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z}{z^2-1} = \lim_{z\to -1} \frac{z}{z-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

$(z-1)(z+1)$

$\int_{C_2} \frac{z}{z^2-1}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(1) + \operatorname{res} f(-1)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi i$

Pre pol. 1. rádu

Ak $f(z)$ je anal. na $C$ aj jej vnútri s výnimkou $a_1, a_2, \dots, a_k$, ktoré sú póly 1. rádu $f(z)$. Potom

$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{res} f(a_1) + \operatorname{res} f(a_2) + \dots + \operatorname{res} f(a_k)\right)$