Matematika 3 – 7.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

3.2 Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu

Lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu s pravou stranou nazývame rovnicu

$$y' + p(x)y = q(x)$$

kde funkcie $p(x)$, $q(x)$ sú spojité na intervale I.

Ak $q(x) = 0$, tak diferenciálnu rovnicu $y' + p(x)y = 0$ nazývame **lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu bez pravej strany**, ktorá sa rieši separáciou premenných.

pomocné vzorce: $\ln e^y = y \quad e^{\ln x} = x$

Riešenie rovnice:
všeobecné riešenie – ak vo výsledku sú premenné x, y a konštanta C
partikulárne riešenie – dostaneme po dosadení počiatočných podmienok (konštanta C nahradené číselnou hodnotou)

Pr. 1 – 52 / 56: Riešte diferenciálnu rovnicu, nájdite všeobecné riešenie

$$xy' - 2y = x\,e^{-\frac{1}{x}}$$

1. Upraviť rovnicu na tvar $y' + p(x)y = q(x)$(aby člen y' bol osamostatnený)

$$xy' - 2y = xe^{-\frac{1}{x}} \qquad / :x$$

$$y' - 2\frac{y}{x} = e^{-\frac{1}{x}}$$

2. Určiť $p(x)$ a vypočítať integračný faktor IF

Porovnaním predpisu rovnice $y' - 2\frac{y}{x} = e^{-\frac{1}{x}}$

so všeobecným predpisom $y' + p(x)y = q(x) \rightarrow p(x) = -\frac{2}{x}$

$$\mathrm{IF} = e^{\int p(x)\mathrm{d}x} \qquad \int p(x)\mathrm{d}x = \int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -2\ln|x| = \ln x^{-2}$$

$$\mathrm{IF} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad \ln e^x = x \qquad n\ln x = \ln x^n$$

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

3. Vynásobiť integračným faktorom obe strany rovnice

$$y' - 2\frac{y}{x} = e^{-\frac{1}{x}} \qquad /.x^{-2}$$

$$y'x^{-2} - 2\frac{y}{x}x^{-2} = e^{-\frac{1}{x}}x^{-2}$$

$$y'\frac{1}{x^2} - 2\frac{y}{x^3} = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}$$

4. Upraviť ľavú stranu rovnice pomocou derivácie súčinu $(a.b)' = a'.b + a.b'$

(ľavá strana rovnice predstavuje deriváciu súčinu funkcie ***y*** a **IF -** pri jej úprave z prvého člena na ľavej strane rovnice opíšeme *y* bez derivácie a IF)

$$(y.\mathrm{IF})' = y'.\mathrm{IF} + y(\mathrm{IF})'$$

$$\left(y\frac{1}{x^2}\right)' = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}$$

$$\int (g(x))' = g(x)$$

5. Integrovať obe strany rovnice

$$\int \left(y\frac{1}{x^2}\right)' = \int e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} -\frac{1}{x} = t \\ \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C$$

$$y\frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} + C$$

$$\boldsymbol{y = x^2 e^{-\frac{1}{x}} + Cx^2}$$ **- všeobecné riešenie**

Pr. 2 – 52 / 61: Riešte diferenciálnu rovnicu, nájdite všeobecné riešenie

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{e^x}{x^2}$$

$$p(x) = \frac{3}{x}$$

$$\text{IF} = e^{\ln x^3} = x^3$$

Pr. 3 – 52 / 49: Riešte diferenciálnu rovnicu, nájdite všeobecné riešenie

$$y' - 2y = e^{2x}$$

$p(x) = -2$

$\mathrm{IF} = e^{-2x}$

Pr. 4 – 52 / 58: Riešte diferenciálnu rovnicu, nájdite všeobecné riešenie

$$y' + \frac{y}{x} = x^5 + 2$$

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

$$\mathrm{IF} = e^{\ln x} = x$$

Pr. 5 – 52 / 50: Riešte diferenciálnu rovnicu, nájdite partikulárne riešenie, ak $y(0) = 3$

$$y' + 2y = e^{-x}$$

$$p(x) = 2 \quad \int p(x)\mathrm{d}x = \int 2\mathrm{d}x = 2x \qquad \mathrm{IF} = e^{2x}$$

$$y' - 2y = e^{-x} \qquad / \,.e^{2x}$$

$$y.'e^{2x} - 2y.e^{2x} = e^{-x}.e^{2x}$$

$$\int (ye^{2x})' = \int e^{x}\mathrm{d}x$$

$$ye^{2x} = e^{x} + C$$

$$\boldsymbol{y = e^{x}.e^{-2x} + C.e^{-2x} = e^{-x} + C.e^{-2x}}$$ **všeobecné riešenie**

Dosadiť počiatočné podmienky do všeobecného riešenie:

$$y(0) = 3, y = 3, x = 0 \rightarrow 3 = e^{0} + C.e^{0}$$

$$3 - 1 = C$$

$$2 = C \rightarrow y = e^{-x} + 2.e^{-2x}$$

$$\boldsymbol{y = e^{-x} + 2.e^{-2x}}$$ **partikulárne riešenie**

Pr. 6 – 52 / 75: Riešte diferenciálnu rovnicu, nájdite partikulárne riešenie, ak $y(0) = 5$

$$y' \cos x + y \sin x = 1$$

$$p(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{IF} = e^{\ln (\cos x)^{-1}} = \frac{1}{\cos x}$$

Pr. 7: Riešte diferenciálnu rovnicu, nájdite partikulárne riešenie, ak $y(1) = \frac{31}{12}$

$$xy' + 2y = x^2 + x + \frac{1}{x^2}$$

$$p(x) = \frac{2}{x}$$

$$\mathrm{IF} = e^{\ln x^2} = x^2$$

Dú: str. 52, 53 / 50, 55, 61, 75, 81, 89, 90