SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

pondelok 16. novembra 2026 10:14

Definícia

Sústavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

nazývame sústava lineárnych algebraických rovníc.
Čísla $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ nazývame koeficienty sústavy,
$x_1, \ldots, x_n$ sú neznáme,
$b_1, \ldots, b_m$ sú pravé strany rovníc.

príklad: opakovanie

$$\begin{aligned} (1)\quad & x + y = 2 \\ (2)\quad & x - y = 0 \end{aligned} \quad +$$

sčítavacia m.

$$2x = 2$$
$$x = 1$$
$$y = 2 - x = 2 - 1 = 1$$

alebo vylučovacia (eliminačná) metóda napr. $y = 2 - x$ z (1) a dosadím do (2)

↑ sústava m rovníc o $\underbrace{n \text{ neznámych}}_{x_1, x_2, \ldots, x_n}$

↓ použitie matíc na riešenie sústav lineárnych rovníc, aby bol výpočet „elegantný"

$\underbrace{a_{11}, \ldots, a_{mn}}_{\text{koeficienty sústavy}}$ a_{ij} → číslo stĺpca, číslo riadku

príklad: $\overset{a_{11}}{\boxed{1.}}x_1 + \overset{a_{12}}{\boxed{1.}}x_2 = 2$

$1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = 0$

$b_1, \ldots, b_m$ ... pravé strany rovníc

použijem nasledovné označenie:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je typu $\boxed{m \times n}$

matica sústavy

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad n \times 1$$

vektor neznámych

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad m \times 1$$

vektor pravých strán

počítajme

$$\boxed{A \cdot \vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \vec{b}$$

výsledok je typu $\boxed{m \times 1}$

podľa definície sústavy

teda sústava je zapísaná pomocou matíc v tvare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

matica sústavy

Sústava lineárnych rovníc v maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Skrátené označenie $A\vec{x} = \vec{b}$, kde A nazývame matica sústavy.

Maticu

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazývame rozšírená matica sústavy.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

rozšírená matica sústavy

príklad:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)}$$

↑ takýmto spôsob môže byť daná sústava lineár. rovníc

príklady:

① $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

② $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

$x_1 + x_2 = 2 \quad | \cdot (-2)$

③ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$x_1 + x_2 = 2 \quad | \cdot (-1)$

riešime $x_1 + x_2 = 2$

① $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$ sústava lineár. rovníc

rieším ledu: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 - x_2 = 0$ (riešenie: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$)

$x_1 + x_2 = 2 \mid \cdot(-2)$, $2x_1 + 2x_2 = 4$ ↙+ (riešenie: nekonečne veľa r. $0 = 0$, $x_2 = 2 - x_1$, $x_1 \in R$)

$x_1 + x_2 = 2 \mid \cdot(-1)$, $x_1 + x_2 = 3$ ↙+ (riešenie: $\emptyset$) $0 \neq 1$ spor

pozrime sa na hodnosť matice A a A'.

↓ je počet nenulových riadkov matice upravenej na stupňovitý tvar ekvivalentné úpravy

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \mid \cdot(-1)$ ↙+ $\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$

$h(A) = 2 = h(A') = 2$ ma práve 1 riešenie

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \mid \cdot(-2)$ ↙+ $\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$h(A) = 1 = h(A') = 1 < n = 2$ sústava má riešenie (nekonečne veľa)

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \mid \cdot(-1)$ ↙+ $\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$h(A) = 1 \neq h(A') = 2$ Sústava nemá riešenie

n ... počet neznámych

Veta (Frobeniova veta)

Sústava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

má riešenie práve vtedy, ak $h(A) = h(A')$.

V tom prípade

a) *Ak* $h(A) = n$, *tak daná sústava má práve jedno riešenie.*

b) *Ak* $h(A) < n$, *tak daná sústava má nekonečne veľa riešení.*

Pozn: Ak $h(A) \neq h(A')$, tak daná sústava nemá riešenie.

Gaussova eliminačná metóda (riešenie sústav lin. rovníc) (GEM)

Gaussova eliminačná metóda

- Prepíšeme sústavu lineárnych rovníc do tvaru rozšírenej matice.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Pomocou postupných ekvivalentných úprav tejto matice upravíme maticu na stupňovitý tvar.
- Na základe Frobeniovej vety urobíme záver o počte riešení danej sústavy.
- Určíme riešenie danej sústavy.

↙ POSTUP

← keďa zistíme $h(A), h(A')$

PRÍKLADY riešime pomocou GEM

$-2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -10$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -5$

$3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -2$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -6$

$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & -2 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & -10 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \end{array}$ ↙+ ↙+ ↙+

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) : 4 \sim$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \\ \cdot(-2) \end{array}$ ↙+ ↙+ $\sim$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot(-5)$ ↙+ $\sim$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 9 \end{array}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot 2 \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-5) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$h(A) = 4 = h(A') = 4 = n$ (počet neznámych)

na základe FROBENIOVEJ VETY sústava má riešenie, práve jedno.

je už v stupňovitom tvare

Ako vyjadríme riešenie? v upravenom tvare postupne dosadíme premenné zdola nahor ↑

(4) rovnica $-3x_4 = 3$

$x_4 = -1$

(3) rovnica $-2x_3 + x_4 = 3$

$-2x_3 - 1 = 3$

$x_3 = -2$

(2) $x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = -5$

$x_2 - 2 = -5$

$x_2 = -3$

(1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -5$

$x_1 - 3 - 2 - 1 = -5$

$x_1 = 1$

výsledok: riešenie $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, -3, -2, -1)^T$

PRÍKLAD: Riešme (GEM)

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

$5x_1 + 3x_2 = 8$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-5) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 5 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = 2 = h(A') = 2$, sústava má riešenie

$n = 3$

$h(A) = h(A') = 2 < n = 3$

nekonečne veľa

zapísané riešenie:

(2) $-7x_2 + 5x_3 = -2$

nech $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$

(počet neznámych, ktoré môžem zvoliť je $n - h(A)$)

$-7x_2 + 5t = -2$

$-7x_2 = -2 - 5t$

$x_2 = \frac{2+5t}{7}$

(1) rovnica $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$

$x_1 + 2 \cdot \left(\frac{2+5t}{7}\right) - t = 2$

$x_1 + \frac{4}{7} + \frac{10}{7}t - t = 2$

$x_1 = \frac{10}{7} - \frac{3}{7}t = \frac{10-3t}{7}$

$(x_1, x_2, x_3)^T = \left(\frac{10-3t}{7}, \frac{2+5t}{7}, t\right)^T$; $t \in \mathbb{R}$

$x_1 = \frac{10}{7} - \frac{3}{7}t = \frac{10-3t}{7}$

vyhovuje: $(x_1, x_2, x_3)^T = \left(\frac{10-3t}{7}, \frac{2+5t}{7}, t\right)^T ; t \in \mathbb{R}$