DETERMINANTY

pondelok 23. novembra 2026 12:22

Definícia

Nech je daná štvorcová matica $A = (a_{ij})$ n-tého stupňa. Matici A môžeme priradiť číslo, ktoré nazývame determinant matice A a označujeme ho det A, resp. |A|.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

← naučíme sa pomocou determinantov riešiť niektoré sústavy lineárnych rovníc.

det A, resp. |A| ← označenie

? ako to číslo získam (vypočítam) ? VÝPOČET DETERMINANTOV

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

nech $n = 2$ (štvorcová matica stupňa 2)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

príklad $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2$

nech $n = 3$ SARRUSOVO PRAVIDLO

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

príklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-2).(-2) + 2.(-3).1 + 3.1.3 - 3.(-2).1 - 1.(-3).3 - 2.1.(-2)$$

$$= 4 - 6 + 9 + 6 + 9 + 4 = \underline{\underline{26}}$$

nech $n \geq 4$ determinanty počítame rozvojom podľa „vhodného" riadka, alebo stĺpca

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & & a_{2j} & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & \vdots & \dots & a_{in} \\ & & & & & \\ a_{n1} & & & a_{nj} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

j-tý stĺpec; ← i-tý riadok

Rozvoj podľa i-tého riadku je: $|A| = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \dots + a_{in}.A_{in}$

kde A_{ij} je algebraický doplnok k prvku a_{ij}

Rozvoj podľa i-tého riadku je: $|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$

kde A_{ij} je algebraický doplnok k prvku a_{ij}

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, kde

D_{ij} je minor (subdeterminant) matice A, ktorý vznikne z A vynechaním i-tého riadku a j-tého stĺpca.

Rozvoj podľa j-tého stĺpca: $|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$

príklad: nabudúce

VLASTNOSTI DETERMINANTOV

- ak $|A| \neq 0$, potom maticu A nazývame regulárnou
- ak $|A| = 0$, potom maticu A nazývame singulárnou
- ak v matici A máme nulový riadok (alebo stĺpec), potom $|A| = 0$.
- vplyv ekvivalentných úprav na hodnotu determinantu

príklad: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ $\qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

ZÁMENA PORADIA DVOCH RIADKOV (aj stĺpcov) = ZMENA ZNAMIENKA DETERMINANTU.

príklad: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ $\quad 1 \cdot 3$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 12 - 18 = -6$

AK RIADOK, alebo stĺpec vynásobím nenulovým číslom, koľkokrát sa zmení hodnota determinantu!

príklad: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ $\quad 1 \cdot (-3) +$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$

PRIPOČÍTANIE NÁSOBKU ISTÉHO RIADKU (alebo stĺpca) k inému riadku (stĺpcu) NEMENÍ HODNOTU DETERMINANTU.