PRIEBEH FUNKCIE - pokračovanie

pondelok 2. novembra 2026 13:48

Veta (nutná podmienka existencie lokálneho extrému)

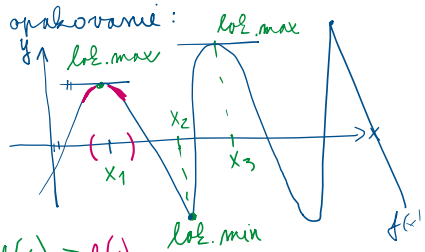
Nech existuje $f'(x_0)$. Ak funkcia f má v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$.

!

Pojem: STACIONÁRNY BOD

je bod x_0 kde $f'(x_0)=0$.

opakovanie:



$f(x_1) \geq f(x)$ pre $x \in O(x_1)$

funkcia môže mať viacero lok. extrémov

pr. y = konštanta $\Rightarrow$ nemá lok. extrém.

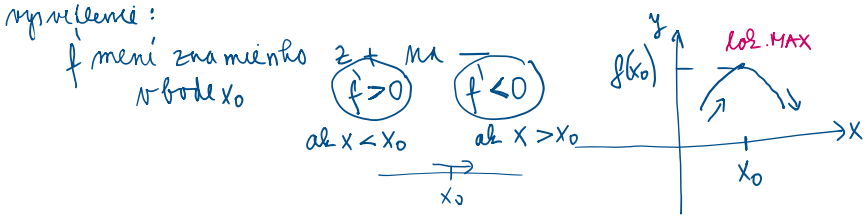
funkcia môže mať lok. extrém len v bodoch, kde $f'(x_0)=0$, alebo kde derivácia neexistuje.

Postačujúce podmienky existencie lokálneho extrému:

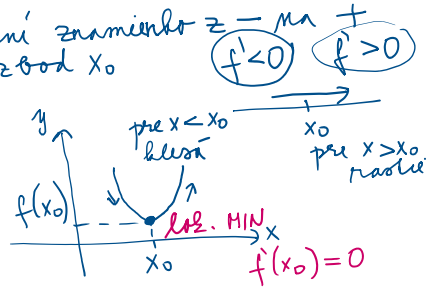
1. Ak f' mení znamienko z $+$ na $-$ má funkcia v bode x_0 lokálne maximum.
   Ak f' mení znamienko z $-$ na $+$ má funkcia v bode x_0 lokálne minimum.

vysvetlenie:

f mení znamienko z + na − v bode x_0



ak f' mení znamienko z − na + v bode x_0



2. postačujúca podmienka existencie lok. extrému:

2. Nech x_0 je stacionárnym bodom funkcie f a nech existuje $f''(x_0)$. Potom ak
   a) $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne minimum.
   b) $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 ostré lokálne maximum.

zdôvodnenie:

a) nech x_0 je stacion. bod $f(x)$, teda $f'(x_0)=0$ (SB)

nech $f''(x_0)>0$

podľa definície

$$f''(x_0) = \left(f'(x_0)\right)' = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} =$$

definícia derivácie f v bode x_0

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0} > 0 \quad \text{aj} \quad \frac{f'(x)}{x-x_0} > 0$$

$f'(x)>0 \wedge x-x_0>0$, alebo $f'(x)<0 \wedge x-x_0<0$

$x>x_0$ $\quad$ $x<x_0$



PRÍKLADY (1) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7$ vyšetríme lok. extrémy funkcie

$D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

1. nájdem SB, lebo extrém môže byť iba v stacionárnych bodoch

$f'(x) = 0$

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

nemáme body, kde f' nie je definovaná

$D(f) = \mathbb{R}$

1. nájdem SB, lebo extrém môže byť iba v stacionárnych bodoch

$f'(x) = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x+3)(x-1) = 0$

$x_1 = -3$, $x_2 = 1$ } SB možné lok. extrémy

máme vyšetrenú monotónnosť

$D(f)$	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	lok. MAX	↘	lok. MIN	↗
		$[-3, 16]$		$[1, \frac{16}{3}]$	

použitá 1. postačujúca podmienka

$f(-3) = -9 + 9 + 9 + 7 = 16$

$f(1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 + 7$

PRÍKLAD vyšetrím aj pomocou 2. postačujúcej podmienky:

$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7$

$f'(x) = x^2 + 2x - 3$

SB: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

$f''(x) = 2x + 2$

$f''(x_1 = -3) = 2.(-3) + 2 = -4 < 0$ lok. MAX

$f''(x_2 = 1) = 2.1 + 2 = 4 > 0$ lok. MIN

POZNÁMKA:

- význam lok. extrémov je pri HĽADANÍ CELKOVÝCH (GLOBÁLNYCH) EXTRÉMOV.

globálne minimum je najmenšie z lok. miním (ak existuje)

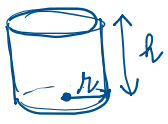
globálne maximum je najväčšie z lok. maxím (ak existuje)

VIEME: SPOJITÁ FUNKCIA na uzavretom intervale $\langle a, b \rangle$ nadobúda MAX aj MIN

$\max_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) = \max \{ \text{lok. maximá}, f(a), f(b) \}$

$\min_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) = \min \{ \text{lok. minimá}, f(a), f(b) \}$

PRÍKLAD: fľaštičky vyrábame zdravé nápoje, plníme do plechoviek o objeme $1\,dm^3$



? aké rozmery má mať naša plechovka, aby sme použili čo najmenej materiálu, teda aby povrch bol MINIMÁLNY.



VIEME $V = 1\,dm^3 = \pi r^2 . h \rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

$P = 2\pi r^2 + 2\pi r . h$ ← hľadáme minimum

$P = 2\pi r^2 + 2\pi r . \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} = P(r)$ funkciu, hľadám lok. extrémy

(SB) $\frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0$

$P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$ rozš. ...

1. nájdem SB $P'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0$

$-2 \cdot r^{-2}$

$\Updownarrow$

$4\pi r^3 - 2 = 0$

$4\pi r^3 = 2$

$r^3 = \frac{1}{2\pi}$

SB $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$P''(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3} > 0$

$r > 0 \quad \forall r > 0$ v bode $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ máme lok. MIN, je to aj celkové minimum

odpoveď: ROZMERY plechovky majú byť: $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$; $h = \frac{1}{\pi r^2}$, potom bude povrch minimálny a teda naše podnikanie úspešné.

VÝZNAM ZNAMIENKA 2. derivácie

KONVEXNOSŤ A KONKÁVNOSŤ FUNKCIE

Definícia

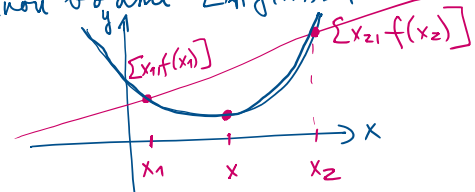
Funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ sa nazýva konvexná (konkávna) na intervale I, ak pre každú trojicu bodov $x, x_1, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ alebo leží na tejto priamke.

Definícia

Funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ sa nazýva rýdzo konvexná (rýdzo konkávna) na intervale I, ak pre každú trojicu bodov $x, x_1, x_2 \in I$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$.

Def.: konvexná funkcia na J ← nalejem kávu

ak pre ľub. $x_1, x, x_2 \in J$ i $x_1 < x < x_2$ platí, že bod $[x, f(x)]$ leží pod priamkou určenou bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$



resp. môže ležať na priamke.

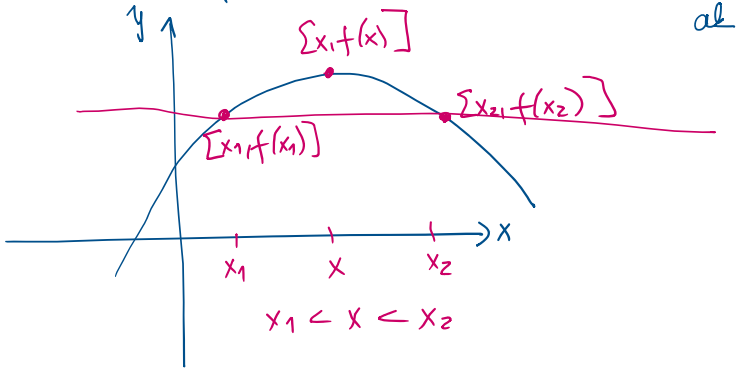
ak nenastáva možnosť, že leží na priamke, tak hovoríme o RÝDZOKONVEXNEJ FUNKCII.

Def.: konkávna funkcia na J

ak pre ľub. $x_1, x, x_2 \in J$, $x_1 < x < x_2$ platí, že bod $[x, f(x)]$ leží nad priamkou, ktorá je určená bodmi $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ (resp. leží na priamke)

ak neleží na priamke, potom je RÝDZO KONKÁVNA.

do konkávnej funkcie kávu nenalejem

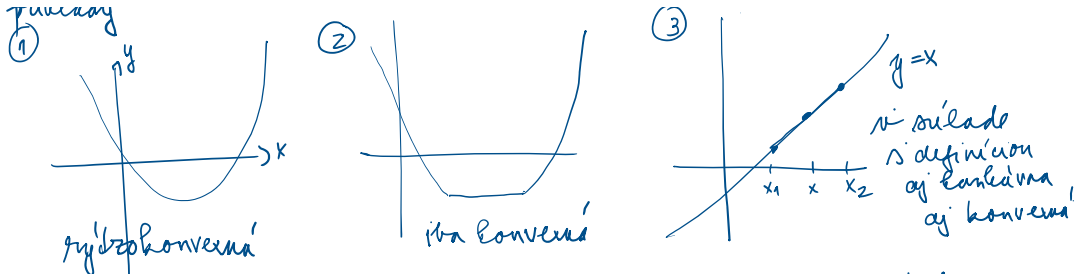


príklady:

① 

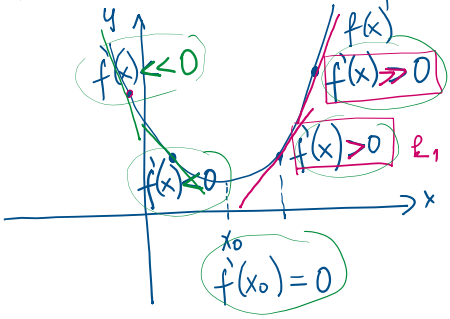
② 

③ 



ak sa zobrazí v súlade s definíciou aj konkávna aj konvexná

vyšetrovanie konvexnosti a konkávnosti pomocou derivácie funkcie:



Čo sa deje s funkciou $f'(x)$?

derivácia rastie

keda $(f')' \geq 0$

keda $f'' > 0$

Veta

Nech funkcia f má na otvorenom intervale I druhú deriváciu. Potom ak pre každé $x \in I$ je

a) $f''(x) > 0$, *tak f je rýdzo konvexná na I.*

b) $f''(x) < 0$, *tak f je rýdzo konkávna na I.*

c) $f''(x) \geq 0$, *tak f je konvexná na I.*

d) $f''(x) \leq 0$, *tak f je konkávna na I.*

PRÍKLAD Vyšetrime konvexnosť a konkávnosť danej funkcie + inflexné body

$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$f'(x) = \frac{1.(x^2-1) - x.2x}{(x^2-1)} = \frac{x^2-1-2x^2}{x^2-1} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = \frac{-2x(x^2-1)^2 - (-x^2-1).2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^{4\cdot 3}} = \frac{-2x(x^2-1)+(x^2+1).4x}{(x^2-1)^3} = \frac{-2x^3+2x+4x^3+4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$

nájdem nulové body 2. derivácie

$f'' = 0$

$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \iff 2x^3+6x = 0$

$2x(x^2+3) = 0 \iff x = 0$ MOŽNÝ IB

$\frac{2x}{(x^2-1)^3}\underbrace{(x^2+3)}_{>0} = f''$

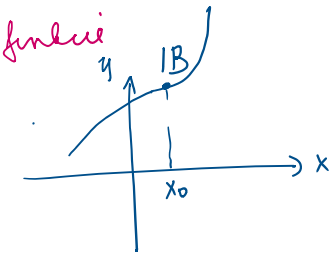
ak $x = -2$: $\frac{-}{+}$ ak $x = -0{,}5$: $\frac{-}{-}$ ak $x = 0{,}5$: $\frac{+}{-}$ ak $x = 2$: $\frac{+}{+}$

$\mathcal{D}(f)$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	IB	$\cap$	$\cup$
		konvexná		konkávna	

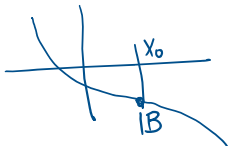
INFLEXNÝ BOD FUNKCIE → bod ohybu funkcie

Definícia

Bod $x_0 \in I$ nazývame inflexným bodom funkcie f, ak funkcia f je v nejakom ľavom okolí bodu x_0 rýdzo konkávna (rýdzo konvexná) a v nejakom pravom okolí bodu x_0 rýdzo konvexná (rýdzo konkávna).



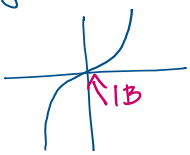
IB inflexný bod fu



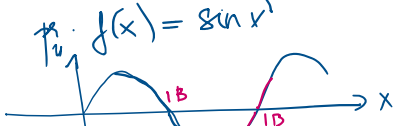
Veta (nutná podmienka existencie inflexie)

Nech existuje $f''(x_0)$. Ak bod x_0 je inflexným bodom funkcie f, tak $f''(x_0) = 0$.

pr. $f(x) = x^3$



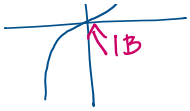
pr. $f(x) = \sin x$

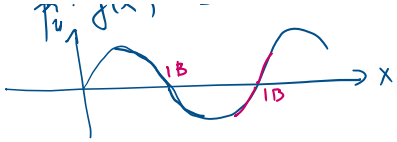


! nutná podmienka existencie IB !

ale kam, kde $f''(x_0) = 0$!

! nutná podmienka existencie IB !
iba tam, kde $f''(x_0) = 0$!





Postačujúce podmienky existencie inflexného bodu

- Nech $f''(x_0) = 0$ a v bode x_0 funkcia f mení konkávnosť na konvexnosť (prípadne naopak), potom bod x_0 je inflexným bodom funkcie f.

} ← budeme využívať príklad: vid vyššie

- Nech $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom bod x_0 je inflexným bodom funkcie f.

1. Zápočtová previerka: TEÓRIA — 1. až 7. prednáška, tabule + prezentácie