

Cvičenia

1. Nájdite derivácie daných funkcií:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{\sin(2x/3)}, & \{[\cos(2x/3)]/[3\sqrt{\sin(2x/3)}]\} \\ f_2(x) &= 4^{3x}, & \{3 \cdot 4^{3x} \ln 4\} \\ f_3(x) &= x10^{-x}, & \{10^{-x}(1-x\ln 10)\} \\ f_4(x) &= \ln \frac{5+4x}{3+7x}, & \{-23(3+7x)/(5+4x)\} \\ f_5(x) &= \ln \sin 2x. & \{2\cotg 2x\} \end{aligned}$$

2. Nájdite derivácie daných funkcií:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \arcsin \sqrt{x}, & \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \right\} \\ f_2(x) &= \arccos \frac{3x-1}{4}, & \left\{ -\sqrt{3}/\sqrt{5+2x-3x^2} \right\} \\ f_3(x) &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, & \{\arcsin x\} \\ f_4(x) &= \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2}), & \{-1/(2+2x^2)\} \\ f_5(x) &= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x). & \{1\} \\ f_6(x) &= \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}, & \{1/(1+x^2)\} \end{aligned}$$

3. Nájdite derivácie daných funkcií:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^x, & \{x^x(1+\ln x)\} \\ f_2(x) &= x^{e^x}, & \{e^x x^{e^x}(\ln x + 1/x)\} \\ f_3(x) &= x^{\sin x}, & \{x^{\sin x}(\cos x \ln x + (\sin x)/x)\} \\ f_4(x) &= (\sin x)^{\cos x}, & \left\{ (\sin x)^{\cos x} \left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] - \sin x \ln \sin x \right\} \\ f_5(x) &= x^{\ln x}. & \{2x^{\ln x-1} \ln x\} \end{aligned}$$

4. Vypočítajte f' . V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje, vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= |x-2|, & \{1 \text{ pre } x > 2; -1 \text{ pre } x < 2; \text{neex. pre } x = 2\} \\ f_2(x) &= |x^3|, & \{3x|x|\} \\ f_3(x) &= \sqrt{|x-1|}. & \left\{ 1/(2\sqrt{x-1}) \text{ pre } x > 1; -1/(2\sqrt{x-1}) \text{ pre } x < 1; f' \text{ neex. pre } x = 1; f'_+(1) = \infty, f'_-(1) = \infty \right\} \end{aligned}$$

5. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie v danom bode:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^2 + 4x + 1, P=(0,?); & \{4x - y + 1 = 0, x + 4y - 4 = 0\} \\ \text{b) } f(x) &= \frac{3x-4}{2x-3}, P=(2,?); & \{x + y - 4 = 0, x - y = 0\} \end{aligned}$$

c) $f(x) = \ln(x+1)$, $P=(0,?)$;

$\{y = x, y = -x\}$

d) $f(x) = e^{-x} \cos 2x$, $P=(0,?)$.

$\{x + y - 1 = 0, x - y + 1 = 0\}$

6. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály k parabole $y = x^2 - 2x + 3$, ak dotyčnica:

a) je rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$;

b) je kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$;

c) zvierá s priamkou $2x + y - 2 = 0$ uhol $\pi/4$.

{ a) $12x - 4y - 13 = 0$, $4x + 12y - 61 = 0$;

b) $4x - 4y + 3 = 0$, $4x - 4y - 15 = 0$;

c) $12x - 4y - 13 = 0$, $4x + 12y - 61 = 0$;

$12x + 36y - 83 = 0$; $108x - 36y - 17 = 0$ }

7. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f , pričom dotyčnica je rovnobežná s priamkou:

a) $2x - y - 3 = 0$ a $f(x) = \ln x$;

b) $x - 2y + 1 = 0$ a $f(x) = e^{x/2} + 1$;

{ a) $2x - y - 1 - \ln 2 = 0$ $2x + 4y - 1 + 4 \ln 2 = 0$;

b) $x - 2y + 3 = 0$; $4x + 2y - 3 = 0$. }

8. Vysokonapäťové elektrické vedenie má rozpätie medzi stožiarmi 80 metrov. Tvar zaveseného vodiča udáva parabola $y = 0,001x^2$, pričom jej vrchol je rovnako vzdialený od oboch stožiarov. Nájdite uhol medzi vodičom a stožiarom.

$\{\arctg 12,5\}$

9. Nájdite uhol, pod ktorým sa pretínajú grafy funkcií:

a) $y = x^2$, $y = x^3$;

$\{\arctg 1/7\}$

b) $y = \sin x$, $y = \cos x$.

$\{\arctg 2\sqrt{2}\}$

10. Priamočiary pohyb telesa je určený rovnicou $s = 2t^3 - 15t^2 + 36t + 2$, kde s je vyjadrené v metroch a t v sekundách. Zistite, v ktorom čase je rýchlosť telesa nulová.

$\{2s, 3s\}$

11. Lietadlo sa pohybuje priamočiarno tak, že jeho vzdialenosť v km od miesta štartu je $16(t^4 - 16t^3 + 64t^2)$, $0 \leq t \leq 8$, kde t je čas v hodinách. Nájdite jeho vzdialenosť, rýchlosť a zrýchlenie v čase $t_1 = 2h$ a $t_2 = 5h$. Kedy sa lietadlo zastaví a zmení smer letu? Akú najväčšiu vzdialenosť dosiahne od miesta štartu?

$\{2304km, 1536km/h, -256km/h^2; 4h, 8h, ; 4096km\}$

12. V indukčnej cievke preteká prúd i , pre ktorý platí $i = 15 \sin^5 3t$, kde prúd i je v ampéroch a čas t v sekundách. Vypočítajte indukovanú elektromotorickú silu $e_i = -L di/dt$ v čase $t = 2\pi/9s$, ak $L = 0,03H$.

$\{1,90V\}$

13. Vypočítajte diferenciály vyšších rádov danej funkcie f v bode x_0 pre prírastok Δx , ak:

a) $f(x) = x^3$; $\Delta x = -0,2$; $d^3 f(1) = ?$;

$\{-0,048\}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $\Delta x = 0,1$; $d^2 f(0) = ?$;

$\{-0,01\}$

14. Pomocou diferenciálu vypočítajte približne a porovnajte s hodnotami nájdenými pomocou kalkulačky:

a) $\operatorname{tg} 46^\circ$;

$\{1,035906\}$

b) $2^{1,002}$.

15. Vypočítajte dané limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, $\{1/6\}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$, $\{1\}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x} \right)$, $\{-\infty\}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} \right)$, $\{+\infty\}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg x - \frac{1}{x} \right)$, $\{0\}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2 \ln x} - \frac{1}{x^2 - 1} \right)$. $\{1/2\}$

16. Vypočítajte dané limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln^x (1/x)$, $\{1\}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2-} (\operatorname{tg} x)^{\cotg x}$, $\{1\}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1-} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right)^{\log x}$, $\{1\}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{2x} \right)^{\operatorname{tg} x}$, $\{1\}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$, $\{e^{-2}\}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$. $\{e^{-2/\pi}\}$

