Funkcia daná parametricky

Krivka v rovine

Začneme so známou fyzikálnou úvahou: Potrebujeme popísať pohyb hmotného bodu v rovine v časovom intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pre každý časový okamih $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ sú súradnice bodu (x, y), v ktorom sa daný hmotný bod v danom čase t nachádza závislé od t a pre dané t sú jednoznačne určené usporiadanou dvojicou $(\varphi(t), \psi(t))$. Inými slovami, pohyb daného hmotného bodu je určený dvojicou funkcií. Sú to funkcie $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ definované na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Pod názvom krivka v rovine rozumieme obyčajne spojitú rovinnú čiaru alebo tzv. geometrické miesto bodov. Krivku najčastejšie popisujeme parametricky. Množinu

$$M = \{(x, y) : x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$$

nazývame ***trajektóriou*** daného ***pohybu*** a dané rovnice ***parametrické rovnice krivky***. Premennú ***t*** nazývame ***parameter***.

Definícia 5.6 Množinu C v rovine nazývame ***jednoduchá krivka***, resp. jednoduchý oblúk, keď existujú funkcie $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbf{R}$, $\psi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbf{R}$, s týmito vlastnosťami:

a) $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$.

b) Funkcie φ, ψ sú spojité na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$.

c) Pre každé dve hodnoty $t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pre ktoré platí $0 < |t_1 - t_2| < \beta - \alpha$, je $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.

d) Ak navyše platí $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$, tak krivku C nazývame jednoduchá uzavretá krivka.

Definícia 5.7 Množinu C v rovine nazývame ***krivka***, keď existujú funkcie $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbf{R}$, $\psi : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbf{R}$, s týmito vlastnosťami:

1. $C = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in \langle \alpha, \beta \rangle\}$.
2. Funkcie φ, ψ sú spojité na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$.
3. Existuje konečná množina $K \subset \langle \alpha, \beta \rangle$ taká, že pre každé dve hodnoty $t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle - K$, $t_1 \neq t_2$, platí $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.

Definícia 5.8 Krivku C s parametrickými rovnicami $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ nazývame ***hladká krivka***, keď funkcie φ, ψ majú na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojité derivácie $\varphi^\circ, \psi^\circ$, kde $\varphi^\circ = \frac{d\varphi}{dt}$, $\psi^\circ = \frac{d\psi}{dt}$ a tieto derivácie nie sú súčasne rovné nule v žiadnom bode $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ (v krajných bodoch uvažujeme jednostranné derivácie). Ak je krivka C uzavretá, musí naviac platiť $(\varphi^\circ(\alpha), \psi^\circ(\alpha)) = k(\varphi^\circ(\beta), \psi^\circ(\beta))$, kde $k > 0$. Krivku C s parametrickými rovnicami $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ nazývame ***po častiach hladká*** práve vtedy, keď existuje také delenie intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$,

$$\alpha = t_0 < t_1 = \ldots = t_n = \beta,$$

že na každom intervale $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$, $k = 1,2,\dots,n$, sú derivácie $\varphi^\circ, \psi^\circ$ spojité a dotykový vektor $(\varphi(t), \psi(t))$ je pre $t \in \langle t_{k-1}, t_k \rangle$ nenulový.

Predpokladajme, že k funkcii $\varphi : J \to D$ existuje inverzná funkcia $\varphi^{-1} : D \to J$, platí $x = \varphi(t)$ práve vtedy, keď $t = \varphi^{-1}(x)$. Ak tento výraz dosadíme do $y = \psi(t)$ dostaneme

$$y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),\ x \in D.$$

Tento prechod nazývame ***vylúčenie parametra***.

Definícia 5.9 Nech funkcie φ, ψ majú na intervale I derivácie $\varphi^\circ, \psi^\circ$. Nech φ° je spojitá a v každom bode $t \in J$ rôzna od nuly. Potom rovnicami $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in J$ je určená funkcia

$$f(x) = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right),\ x \in D = \varphi(J),$$

ktorá má na intervale D deriváciu f' a platí

$$f'(x) = \frac{\psi^\circ}{\varphi^\circ},\ t = \varphi^{-1}(x)$$

kde $\varphi^\circ = \dfrac{d\varphi}{dt}$, $\psi^\circ = \dfrac{d\psi}{dt}$.