Spojitosť funkcie

V tejto časti sa budeme zaoberať iba reálnou funkciou reálnej premennej, t.j. $f: A \to \mathbf{R}$, kde $A \subset \mathbf{R}$.

Definícia 3.4 Nech $f: A \to \mathbf{R}$ a nech $a \in A$. Hovoríme, že ***funkcia*** $f: A \to \mathbf{R}$ ***je spojitá v bode*** a, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre každé $x \in A$ a $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

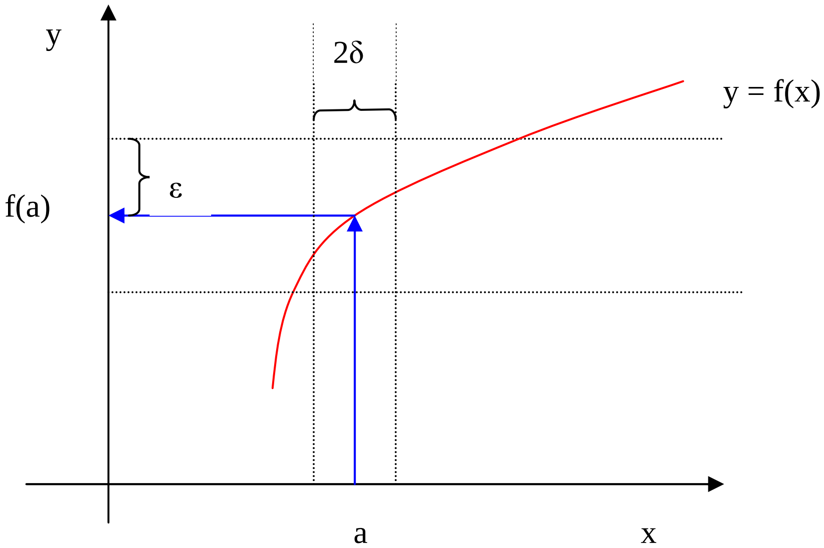
Ekvivalentný zápis je: Funkcia f je spojitá v bode $x \in A$ ak

$$(\forall O_\varepsilon(f(a)))(\exists O_\delta(a)): f\left(O_\delta(a) \cap A\right) \subset O_\varepsilon(f(a))$$

alebo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A, |x - a| < \delta): |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Príklad *Nech* $f(x) = 0$ *pre* $x < 0$ *a* $f(x) = 1$ *pre* $x \geq 0$. *Táto funkcia nie je spojitá v bode* $a = 0$. *Ak* $\varepsilon < 1$, *tak* $\forall x \in (-\infty, 0)$, $f(x) \notin O_\varepsilon(f(a))$.



Definícia 3.5

a) Funkcia f je spojitá, ak je spojitá v každom bode definičného oboru.

b) Funkcia f je spojitá na množine $M \subset D(f)$, ak je spojitá funkcia $f_{|M}$.

Poznámka Ak je bod a izolovaným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f, tak obyčajne sa nezaoberáme spojitosťou funkcie v bode a.

Definícia 3.6 Nech $f: A \to \mathbf{R}$, $a \in A$, a nech $C = \langle a, \infty) \cap A$ a $D = (-\infty, a\rangle \cap A$.

- Ak funkcia $f_{|C}: C \to \mathbf{R}$ je spojitá v bode $a \in C$, tak hovoríme, že funkcia $f: A \to \mathbf{R}$ je spojitá sprava v bode $a \in A$.
- Ak funkcia $f_{|D}: D \to \mathbf{R}$ je spojitá v bode $a \in D$, tak hovoríme, že funkcia $f: A \to \mathbf{R}$ je spojitá zľava v bode $a \in A$.

Veta 3.8 Ak je funkcia $f: A \to B$ spojitá sprava aj zľava v bode $a \in A$, tak je spojitá v bode a.

Veta 3.9 Nech funkcie $f: A \to \mathbf{R}$, $g: A \to \mathbf{R}$ ***sú spojité v bode*** $a \in A$ a nech $c \in \mathbf{R}$. Potom v bode a sú spojité aj funkcie $f+g, f-g, cf, fg, |f|$ a ak je $g(a) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode a.

Veta 3.10 Nech funkcia $f: A \to \mathbf{R}$ je spojitá v bode $a \in A$ a funkcia $g: B \to C$ je spojitá v bode $f(a) \in B$. Potom funkcia $F = g \circ f: A \to C$ $(F(x) = f[g(x)])$ ***je spojitá v bode*** a.

Veta 3.11 Každá elementárna funkcia je spojitá.