Pojem derivácie a jej základné vlastnosti

Najprv uvedieme príklady, ktoré viedli k zavedeniu pojmu derivácia funkcie.

Príklad *Predpokladajme, že pohyb hmotného bodu je popísaný funkciou* $s = f(t)$, *kde* t *je čas a* s *je dráha, ktorú hmotný bod prejde po priamke od istého zvoleného bodu. Potom*

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

je priemerná rýchlosť pohybujúceho sa bodu po priamke v časovom intervale $\langle t_0, t_0 + \Delta t \rangle$. *Ak existuje*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = v_0 \in \mathbf{R},$$

tak v_0 *je okamžitá rýchlosť pohybujúceho sa bodu v okamihu* t_0.

Príklad *Nech Q(t) je veľkosť elektrického náboja, ktorý pretiekol vodičom za časový interval* $\langle t_0, t \rangle$, *kde* t_0 *je začiatočný okamih, od ktorého sledujeme prietok elektrického náboja vodičom. Potom podiel*

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$

nazývame priemernou intenzitou elektrického prúdu na intervale $\langle t_0, t \rangle$. *Ak existuje*

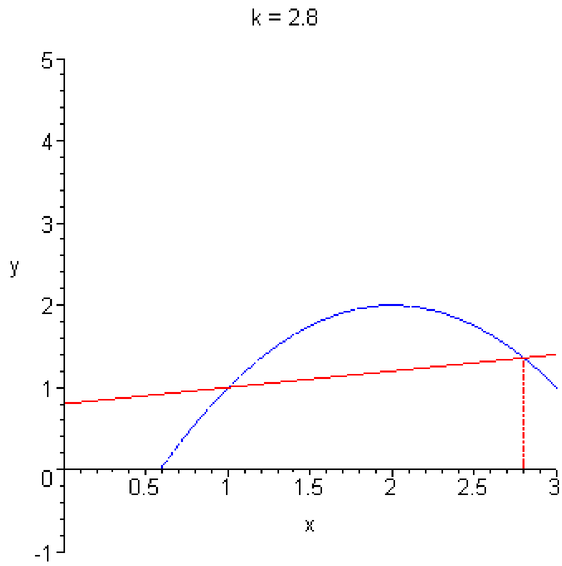
$$\lim_{t \to t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} \in \mathbf{R},$$

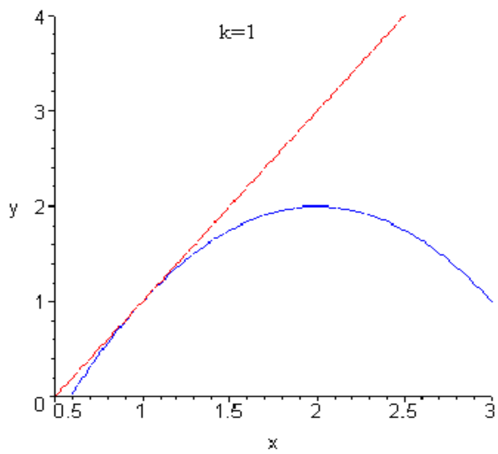
tak toto číslo nazývame okamžitou intenzitou elektrického prúdu v okamihu t_0.

Príklad *Ak existuje* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \in \mathbf{R}$,

tak existuje dotyčnica *ku grafu funkcie* $y = f(x)$ *v bode* $(x_0, f(x_0))$, *ktorá má rovnicu*

$$y - f(x_0) = k(x - x_0).$$





Vzhľadom na dôležitosť uvedených limít zavádzame pre nich označenie derivácia funkcie v bode.

Definícia 4.1 *Hovoríme, že* ***funkcia*** f ***má v bode*** $x_0 \in D(f)$ ***deriváciu****, ak je definovaná v okolí bodu* x_0 *a existuje limita*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Túto limitu nazývame deriváciou funkcie f *v bode* x_0 *a označujeme ju* $f'(x_0)$.

Pre deriváciu funkcie f v bode x_0 používame aj označenia: $\left[f(x)\right]'_{x=x_0}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$.

Ak je daná funkcia definovaná vzorcom $y = f(x)$, tak jej deriváciu v bode x_0 označujeme tiež $y'(x_0)$. Ak v definícii derivácie položíme $x = x_0 + h$, dostaneme

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Poznámka Ak limita v definícii derivácie je vlastná, resp. nevlastná, hovoríme o vlastnej, resp. nevlastnej derivácii. V ďalšom texte pod pojmom "derivácia" budeme rozumieť vlastnú deriváciu.

Dôležitý vzťah medzi deriváciou funkcie a spojitosťou funkcie f v bode x_0 vyjadruje veta:

Veta 4.1 ***Ak funkcia*** f ***má*** v bode x_0 ***deriváciu***, tak ***je*** v tomto bode ***spojitá***.

Opačné tvrdenie neplatí, teda funkcia spojitá v bode x_0, nemusí mať v bode x_0 deriváciu.
Zavedieme si pojem derivácia funkcie na množine.

Definícia 4.2 Nech $M \subset A$ je množina všetkých bodov, v ktorých má funkcia $f : A \to \mathbf{R}$ deriváciu. Potom môžeme na množine M definovať funkciu $g : M \to \mathbf{R}$ vzťahom $g(x) = f'(x)$, $x \in M$. Funkciu g nazývame deriváciou funkcie f na množine M a označujeme f' alebo $\dfrac{df}{dx}$.

Podobne ako sme pri limitách zaviedli jednostranné limity, obdobne definujeme jednostranné derivácie funkcie.

Definícia 4.3 Hovoríme, že ***funkcia*** f ***má*** v bode $x_0 \in \mathbf{R}$ ***deriváciu zľava***, ak je definovaná v istom ľavom okolí bodu x_0 a existuje

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \text{ (resp. } \lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{)},$$

resp. ***deriváciu sprava***, ak je definovaná v istom pravom okolí bodu x_0 a existuje

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \text{ (resp. } \lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{)}.$$

Tieto limity nazývame deriváciou zľava, resp. sprava funkcie f v bode x_0 a označujeme ich obyčajne $f'_-(x_0)$, resp. $f'_+(x_0)$. $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ nazývame jednostrannými deriváciami funkcie f v bode x_0.

Poznámka Ak funkcia f má v bode x_0 deriváciu zľava, resp. sprava, tak je v bode x_0 spojitá zľava, resp. sprava.

Veta 4.2 Funkcia f má v bode x_0 (obojstrannú) deriváciu $f'(x_0)$ práve vtedy, ak má v bode x_0 deriváciu zľava $f'_-(x_0)$, deriváciu sprava $f'_+(x_0)$ a platí $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ (ak x_0 je vnútorným bodom $D(f)$).

Ak $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, tak neexistuje derivácia $f'(x_0)$. Napríklad spojitá funkcia $f(x) = |x|$ má v bode 0 deriváciu zľava $f'_-(0) = -1$ a deriváciu sprava $f'_+(0) = 1$, teda neexistuje $f'(0)$.

Definícia 4.4 Hovoríme, že funkcia f má na uzavretom intervale $\langle a,b \rangle$ deriváciu f', ak funkcia f má na intervale (a,b) deriváciu, v bode a deriváciu sprava a v bode b deriváciu zľava. Hovoríme, že funkcia f je hladká na intervale $\langle a,b \rangle$, ak jej derivácia f' je spojitá na $\langle a,b \rangle$.