Integrácia metódou per partes

Veta 6.4 Nech funkcie *u*, *v* majú spojité derivácie na intervale *J*.
Potom $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Príklad *Vypočítajme* $\int x^5 \ln x dx$ *na intervale* $(0, \infty)$.

Riešenie. Položme $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x^5$. Potom $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{x^6}{6}$. Pretože sú splnené podmienky vety 6.4, platí $\int x^5 \ln x dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^6}{6} dx = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C$.

Príklad *Vypočítajme* $\int xe^{5x} dx$.

Riešenie. Položme $u(x) = x$, $v'(x) = e^{5x}$. Potom $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{e^{5x}}{5}$. Pretože sú splnené podmienky vety 6.4, platí $\int xe^{5x} dx = x\frac{e^{5x}}{5} - \int 1\frac{e^{5x}}{5} dx = x\frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C$.

Príklad *Vypočítajme* $\int e^x \sin x dx$.

Riešenie. Položme $u(x) = e^x$, $v'(x) = \sin x$. Potom $u'(x) = e^x$, $v(x) = -\cos x$.
Pretože sú splnené podmienky vety 6.4, platí $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$.
Teraz položme $u(x) = e^x$, $v'(x) = \cos x$. Potom $u'(x) = e^x$, $v(x) = \sin x$.
Pretože aj teraz sú splnené podmienky vety 6.4, platí $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$.
Z poslednej rovnosti dostávame $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C$.

Substitučná metóda

Veta 6.5 Nech $f : J \to R$ je spojitá funkcia, $\varphi : I \to J$ je spojito diferencovateľná bijekcia. Nech $G : I \to R$ je primitívnou funkciou k funkcii $g : I \to R$, $g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
Potom $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G[\varphi^{-1}(x)]$.

Platí tiež tvrdenie: Nech F je primitívna funkcia k funkcii f na intervale (α, β). Nech má funkcia $\varphi(x)$ v intervale (α, β) deriváciu $\varphi'(x)$ a nech pre všetky $x \in (a, b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha, \beta)$.

Potom funkcia $F[\varphi(x)]$ je primitívna funkcia k funkcii $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ v intervale (a, b).

Pri počítaní $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ položíme $t=\varphi(x)$, $dt=\varphi'(x)dx$ a dostaneme $\int f(t)dt$ a ak vieme, že $\int f(t)dt = F(t)$, tak $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]$. Stačí sa potom presvedčiť derivovaním o správnosti výsledku.

Príklad *Ukážme, že platí* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

Zavedieme substitúciu f(x)=t, teda $f'(x)dx = dt$ *a* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C$ *na každom intervale, kde existuje* f' *a* $f(x)\neq 0$.