Definícia určitého integrálu

Majme spojitú a nezápornú funkciu *f*: $\langle a,b\rangle \to R$. Nech v rovine je daná pravouhlá súradnicová sústava. Nech $A = \{[x,y] \in R^2 : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ je množina bodov tejto roviny (tzv. krivočiary lichobežník). Majme za úlohu vypočítať obsah tohoto lichobežníka. Môžeme postupovať takto:

Rozdelíme interval $\langle a,b\rangle$ na podintervaly $\langle x_0,x_1\rangle, \langle x_1,x_2\rangle, \ldots \langle x_{n-1},x_n\rangle$, kde

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} x_n - b.$$

Každý takýto systém intervalov nazveme ***delenie intervalu*** $\langle a,b\rangle$, body $x_i, i-1,2,\ldots,n$ nazývame ***deliace body*** delenia intervalu $\langle a,b\rangle$. Dĺžku i-tého čiastočného intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle, i-1,2,\ldots,n$ označujeme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ak pre každé prirodzené číslo *n* je dané jedno delenie D_n intervalu $\langle a,b\rangle$, hovoríme o ***postupnosti delení*** intervalu $\langle a,b\rangle$.

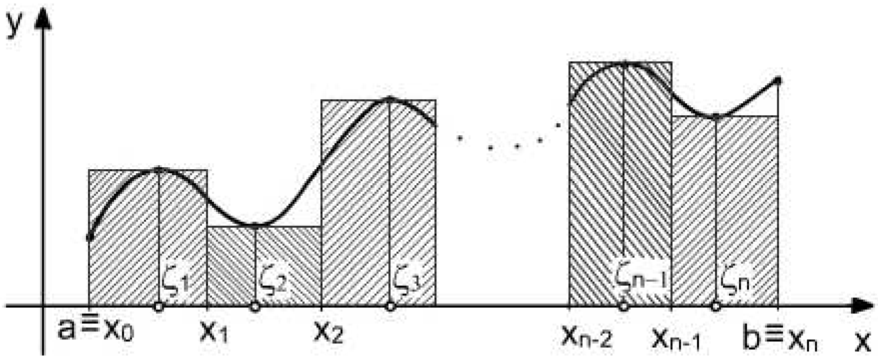
Číslo $\|D\| := \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ nazývame ***normou delenia*** *D*.

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a,b\rangle$ *je* ***normálna***, ak platí $\lim\limits_{n\to\infty}\|D_n\| = 0$.

Nech $\xi_i, i = 1,2,\ldots,n$ je ľubovoľný bod z intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$.

Integrálnym súčtom funkcie *f* pre delenie *D* intervalu $\langle a,b\rangle$ a pre danú voľbu čísel $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ nazývame číslo

$$S(f,D) := f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$



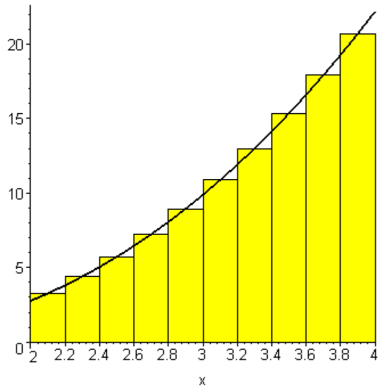
Nech m_i je infimum a M_i supremum funkcie *f* na *i* - tom čiastočnom intervale $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ delenia *D*.

Dolným integrálnym súčtom funkcie *f* pre delenie *D* intervalu $\langle a,b\rangle$ nazývame číslo

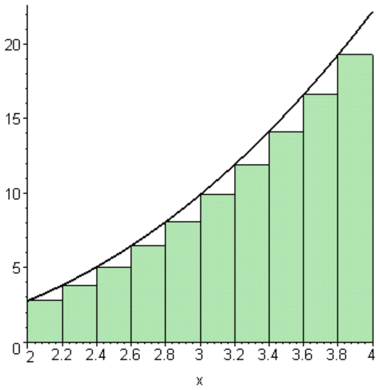
$$\underline{S}(f,D) := m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i .$$

Horným integrálnym súčtom funkcie *f* pre delenie *D* intervalu $\langle a,b\rangle$ nazývame číslo

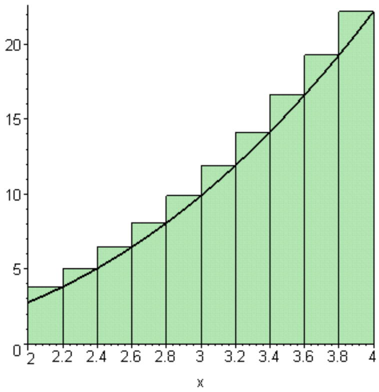
$$\overline{S}(f,D) := M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + .. + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \,.$$



Integrálny súčet.



Dolný integrálny súčet.



Horný integrálny súčet.

Ak S je obsah uvažovaného krivočiareho lichobežníka, tak platí

$$\underline{S}(f,D) \le S \le \overline{S}(f,D), \quad \underline{S}(f,D) \le S(f,D) \le \overline{S}(f,D).$$

Dá sa ukázať, že ak existuje práve jedno číslo S, ktoré spĺňa danú nerovnosť pre ľubovoľné delenie D intervalu $\langle a,b\rangle$, tak toto číslo nazveme určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$.

V niektorých úlohách predpoklad spojitosti a nezápornosti funkcie nemusí byť splnený.

Definícia 7.1 Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na $\langle a,b\rangle$. Funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$, ak pre každú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a,b\rangle$ je postupnosť $\{S(f,D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ integrálnych súčtov funkcie f pre delenie D_n a ľubovoľné voľby čísiel ξ_i konvergentná.

Určitým integrálom funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ nazývame číslo $S = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n)$ a označujeme ho znakom $\int_a^b f(x)dx$.

Číslo a nazývame ***dolná hranica***, číslo b nazývame ***horná hranica*** určitého integrálu.

Poznámka Názov určitý integrál zaviedol Leibnizov žiak Jacob Bernoulli. Znak $\int$ je štylizované písmeno S ako začiatočné písmeno slová Summa, ktoré používal Leibniz. Súčtovú definíciu integrálu uviedol A. Cauchy v r. 1821 pre spojité funkcie a B. Riemann v r. 1853 i pre nespojité funkcie. Preto sa tento integrál často nazýva **Riemannov integrál** alebo **Cauchy – Riemannov integrál**.

Newtonov - Leibnizov vzorec

Veta 7.1 *(Newtonov - Leibnizov vzorec)* Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech má na intervale $\langle a,b\rangle$ primitívnu funkciu F. Potom platí $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Rozdiel $F(b) - F(a)$ sa zvykne označovať tiež znakom $[F(x)]_a^b$.