Integrály niektorých funkcií

Integrovanie niektorých racionálnych funkcií:

- $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C$ pre $k \neq 1$. Ak je $k = 1$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)} = \ln|x-\alpha| + C$$

Výsledok platí na každom intervale, ktorý neobsahuje bod α.

- $\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$ pre $p^2 - 4q < 0$ použijeme substitúciu $x + \frac{p}{2} = t\sqrt{a}$,

kde $a = q - \frac{p^2}{4}$. Dostávame

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{a}} arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{a}}.$$

- $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{(2x + p)dx}{x^2 + px + q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q} + C$.

Položme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n}$ potom pre $n > 1$ platí

$$I_n = \frac{x + \frac{p}{2}}{2(n-1)\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} I_{n-1}.$$

Integrovanie iracionálnych funkcií:

- $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right] dx$, kde $k_1, \ldots k_n$ sú prirodzené čísla, *a, b, c, d* sú reálne čísla

a platí $ad - bc \neq 0$, môžeme riešiť pomocou substitúcie $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$, pričom k je najmenší spoločný násobok čísel $k_1, \ldots k_n$.

- $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$, kde $a \neq 0$ možno pomocou Eulerových substitúcií prepísať na integrál z racionálnej funkcie.

Ak $a > 0$, položíme $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$.

Ak $c \geq 0$, položíme $xt = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c}$.

Ak α, β sú reálne korene kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, položíme $t = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$.

Príklad *Vypočítajme* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$.

Riešenie. Ak použijeme substitúciu $\sqrt{x^2 + a} = t - x$, po úpravách dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

□ $\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$,

kde m, n, p sú racionálne čísla, sa nazýva ***binomický integrál***. Keď jedno z čísiel $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ je celé číslo položíme:

- $x = t^s$, ak p je celé číslo a $m = \frac{q}{s}, n = \frac{r}{s}$;
- $a + bx^n = t$, ak $\frac{m+1}{n}$ je celé číslo;
- $ax^{-n} + b = t$, ak $\frac{m+1}{n} + p$ je celé číslo.

Metóda neurčitých koeficientov

Nech $P : R \to R$ je polynóm n-tého stupňa, $a, b, c \in R, a \neq 0$. Potom platí

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

kde koeficienty polynómu Q stupňa $n-1$ a číslo k určíme metódou neurčitých koeficientov z rovnosti polynómov $P(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}\left(Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}\right)' + k$, ktorú sme dostali derivovaním poslednej rovnice a násobením odmocninou $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Integrovanie trigonometrických funkcií:

□ $\int R(\sin x, \cos x) dx$,

kde $R(u, v)$ je racionálna funkcia, možno upraviť substitúciou $t = tg\frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi)$ na neurčitý integrál z racionálnej funkcie. Pritom platí $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ pre $t \in (-\infty, \infty)$.

Príklad *Vypočítajme* $\int \frac{dx}{\sin x}, \quad x \in (0, \pi)$

Riešenie. Po zavedení substitúcie $t = tg\frac{x}{2}$ dostaneme

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

- Ak má funkcia $R(u,v)$ špeciálny tvar, môžeme použiť aj iné substitúcie:
  - Ak $R(u,v)$, kde $u=\sin x, v=\cos x$ je nepárna v premennej v pre každé $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, tak použijeme substitúciu $t=\sin x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
  - Ak $R(u,v)$, kde $u=\sin x, v=\cos x$ je nepárna v premennej u pre každé $x \in (0,\pi)$, tak použijeme substitúciu $t=\cos x,\ x\in(0,\pi)$.
  - Ak $R(u,v)$, kde $u=\sin x, v=\cos x$ je párnou funkciou v oboch premenných pre každé $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, tak použijeme substitúciu $t=tgx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. V tomto prípade niekedy je výhodnejšie použiť vzorce $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

Príklad *Vypočítajme* $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

Riešenie. Daný integrál môžeme upraviť takto

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \int (\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\,dx + \int \sin^2 2x\cos 2x\,dx\right)$$

Pre prvý z integrálov platí $\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$

a pri výpočte druhého integrálu položíme $\sin 2x = t$, teda $2\cos 2x dx = dt$ a dostaneme

$$\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{6}\sin^3 2x + C$$

Teda $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+\frac{1}{6}\sin^3 2x + C$.

- Integrály $\int \sin ax\cos bx dx,\quad \int \sin ax \sin bx dx,\quad \int \cos ax\cos bx dx,$ upravíme pomocou vzorcov

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$