Elementárne funkcie

a) ***Konštantná funkcia*** je daná vzťahom $f(x) = c \in \mathbf{R}$. Grafom konštantnej funkcie je priamka rovnobežná s osou *x*, teda $y = c$ na $\mathbf{R}$.

b) ***Mocninová funkcia*** s prirodzeným exponentom $n \in \mathbf{N}$ je daná vzorcom $f(x) = x^n$. Je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$. Mocninová funkcia so záporným celým koeficientom $-n, n \in \mathbf{N}$ je daná vzorcom $f(x) = x^{-n}$. Je definovaná na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

c) ***Funkcia n-tá odmocnina*** $(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ je definovaná vzorcom $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Pre *n* párne je definovaná na intervale $\langle 0, +\infty)$, pre *n* nepárne je definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$.

d) ***Algebrický polynóm*** je funkcia definovaná vzorcom

$$f(x) = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0$$

alebo v tvare

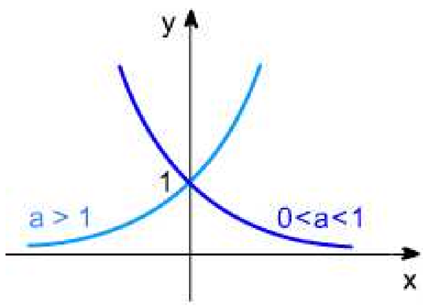
$$f(x) = P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,\ a_n \neq 0$$

kde čísla $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbf{R}$, nazývame koeficienty polynómu *P* a $n \in \mathbf{N}$ je stupeň polynómu. Obor definície je $D(f) = (-\infty, \infty)$.

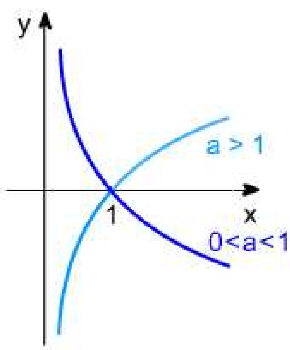
e) ***Racionálna funkcia*** je definovaná predpisom $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde *P*, *Q* sú polynómy. Táto racionálna funkcia je definovaná pre všetky *x*, pre ktoré je $Q(x) \neq 0$.

f) ***Mocninová funkcia s reálnym exponentom*** je funkcia definovaná vzorcom $f : y = x^r$. Pre necelé *r* je táto funkcia definovaná na intervale $(0, +\infty)$ (pre $r>0$ tiež pre $x=0$).

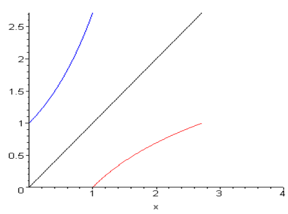
g) ***Exponenciálna funkcia*** je daná vzťahom $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$). Definičný obor je $(-\infty, +\infty)$, obor funkčných hodnôt je interval $(0, +\infty)$. Pre $a > 1$ je funkcia a^x rastúca. Pre $0 < a < 1$ je funkcia a^x klesajúca. Graf exponenciálnej funkcie prechádza bodom [0, 1].
Dôležitá je exponenciálna funkcia pre $a = e$, kde e je Eulerovo číslo.



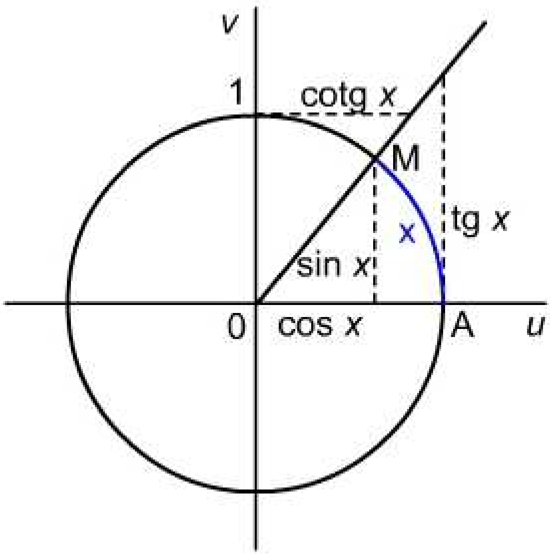
h) ***Logaritmická funkcia***. Pretože exponenciálna funkcia $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) je rýdzo monotónna na intervale $(-\infty, +\infty)$, existuje k nej inverzná funkcia, ktorá sa nazýva ***logaritmická funkcia*** so základom a a označujeme ju $y = \log_a x$. Je definovaná na intervale $(0, +\infty)$ a má obor funkčných hodnôt $(-\infty, +\infty)$. Pre $a > 1$ je funkcia $\log_a x$ rastúca, pre $0 < a < 1$ je funkcia $\log_a x$ klesajúca. Logaritmus so základom e sa nazýva prirodzený logaritmus a označujeme ho $\ln x$.

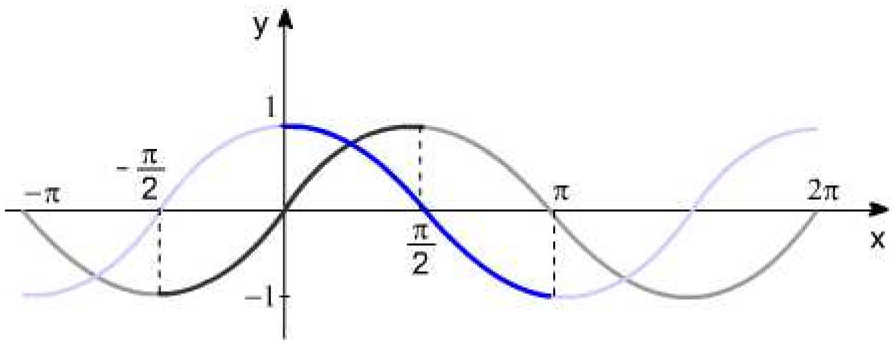


Inverznou funkciou ku funkcii
$f : (1, e) \to (0,1),\ f(x) = \ln x$ (červená)
je funkcia
$f^{-1} : (0,1) \to (1, e),\ f^{-1} = e^x$ (modrá).



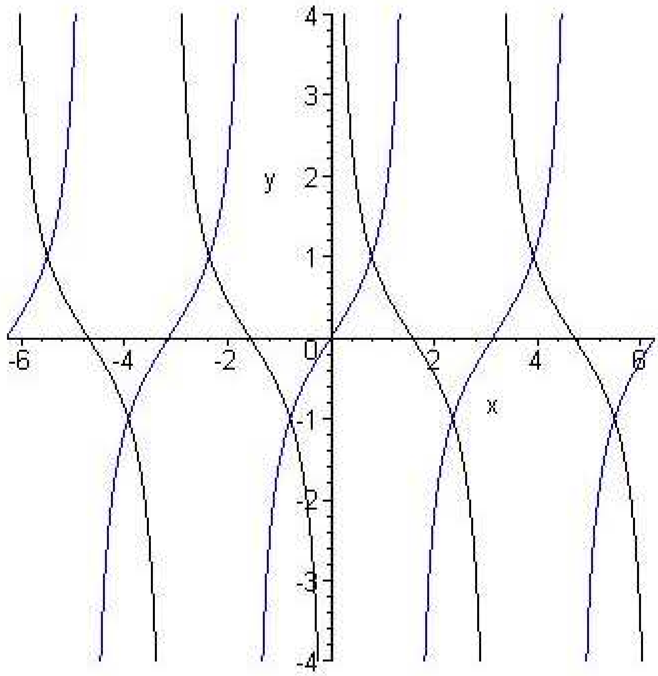
i) ***Goniometrické funkcie***. V rovine $\mathbf{R}^2$ zvoľme súradnicovú sústavu $[O;u,v]$ a uvažujme jednotkovú kružnicu $u^2+v^2=1$. Nech bod M leží na tejto kružnici. Nech x je veľkosť uhla polpriamky OM s polpriamkou OA v oblúkovej miere, potom môžeme definovať funkcie $y=\sin x$, resp. $y=\cos x$ ako druhú, resp. prvú súradnicu bodu M.





Funkcie tangens, kotangens definujeme pomocou vzorcov

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{cotg} x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$



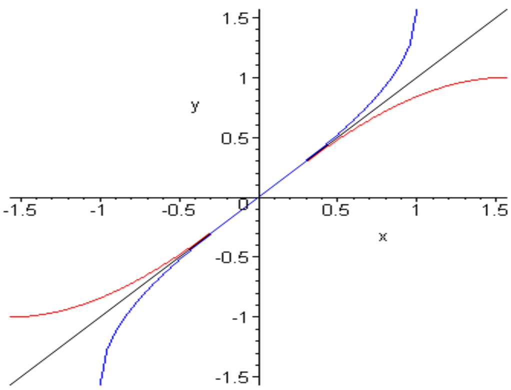
Niektoré vlastnosti goniometrických funkcií:

- Funkcie $\sin x$, $\cos x$ sú definované pre každé $x \in \mathbf{R}$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pre každé $x \in \mathbf{R}$.
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ pre každé $x, y \in \mathbf{R}$.
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ pre každé $x, y \in \mathbf{R}$.
- Funkcia $\sin x$ je nepárna, funkcia $\cos x$ je párna.
- Sínus a kosínus sú periodické funkcie so základnou periódou 2π.
- $|\sin x| \le 1, |\cos x| \le 1$ pre každé $x \in \mathbf{R}$.
- Funkcia $\operatorname{tg} x$ je definovaná pre všetky $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Funkcia $\operatorname{cotg} x$ je definovaná pre všetky $x \in \mathbf{R}$, pre ktoré $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- Číslo π je najmenšia perióda funkcií $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.
- Funkcie $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ sú nepárne.
- Pre každé $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ platí $\operatorname{tg} x . \operatorname{cotg} x = 1$.

j) ***Cyklometrické funkcie***. Goniometrické funkcie nie sú prosté. Môžeme však vytvoriť ich zúženia na vhodné intervaly tak, aby ich zúženia boli prosté funkcie, potom môžeme vytvoriť k nim inverzné funkcie, ktoré nazývame cyklometrické. Definujeme ich týmto spôsobom:

1. Funkcia $\sin x$ je rastúca na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Inverzná funkcia k funkcii $\sin x$ zúženej na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je funkcia $y = \arcsin x$. Je definovaná na intervale $\langle -1, 1 \rangle$ a zobrazuje ho na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



2. Funkcia $\cos x$ je klesajúca na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle -1, 1 \rangle$. Inverzná funkcia k funkcii $\cos x$ zúženej na interval $\langle 0, \pi \rangle$ je funkcia $y = \arccos x$. Je definovaná na intervale $\langle -1, 1 \rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, \pi \rangle$.

3. Funkcia $\operatorname{tg} x$ je rastúca na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, +\infty)$.

Inverzná funkcia k funkcii $\operatorname{tg} x$ zúženej na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ je funkcia $y = \operatorname{arctg} x$. Je definovaná na intervale $(-\infty, +\infty)$ a zobrazuje ho na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

4. Funkcia $\operatorname{cotg} x$ je klesajúca na intervale $\langle 0, \pi \rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, +\infty)$. Inverzná funkcia k funkcii $\operatorname{cotg} x$ zúženej na interval $\langle 0, \pi \rangle$ je funkcia $y = \operatorname{arccotg} x$. Je definovaná na intervale $(-\infty, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, \pi \rangle$.

k) ***Hyperbolické funkcie*** definujeme takto:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (\textit{ hyperbolický sínus});$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (\textit{ hyperbolický kosínus});$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (\textit{ hyperbolický tangens});$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad (\textit{ hyperbolický kotangens}).$$