

Cvičenia

1. Nájdite plošný obsah roviny ohraničenej krivkami:

- a) $y = x^2 - 2x, y = x$. $\left[\frac{9}{2}\right]$ e) $x = 0, x = \frac{1}{2}, y = 0, y = xe^{-2x}$. $\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}\right]$
- b) $y = x^2, y^2 = x$. $\left[\frac{1}{3}\right]$
- c) $y = x^3, y = 4x$. $[8]$ f) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, y = x - 1, y = 2x - 2$
- d) $xy = 4, x + y = 5$. $\left[\frac{15}{2} - 8\ln 2\right]$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

2. Vypočítajte plošný obsah časti roviny ohraničenej krivkou danou parametrickými rovnicami:

- a) $x = 3t^2, y = 3t - t^3, t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$. $\left[\frac{72\sqrt{3}}{5}\right]$
- b) $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$. $\left[\frac{8}{15}\right]$
- c) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ a úsečkou $x = at, y = 0, a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. $[3\pi a^2]$
- d) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0$. $\left[\frac{3\pi a^2}{8}\right]$
- e) $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0$ a polpriamkou $x = a, y \leq 0$. $\left[a^2 \frac{(4\pi^3 + 3\pi)}{3}\right]$

3. Nájdite plošný obsah časti roviny ohraničenej krivkami, ktorých rovnice v polárnych súradniciach sú:

- a) $\rho = a\varphi, a > 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a polpriamkou $\varphi = 0$. $\left[\frac{4\pi^3 a^2}{3}\right]$
- b) $\rho = a \cos \varphi, a > 0$. $\left[\frac{\pi a^2}{4}\right]$
- c) $\rho = 2a(2 + \cos \varphi), a > 0$. $[18\pi a^2]$
- d) $\rho = 4 \sin^2 \varphi$. $[6\pi]$

4. Nájdite objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti určenej danými krivkami okolo osi o_x :

- a) $y = x^2, y^2 = x$. $\left[\frac{3\pi}{10}\right]$ b) $y = x^2, y = 1 - x^2$. $\left[\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}\right]$

5. Nájdite objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti určenej danými krivkami okolo osi o_y :

- a) $x = 0, y^2 + x - 4 = 0$, $\left[34 + \frac{2}{15}\right]$
- b) $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = a, a > 0$. $[2\pi(1 - (a+1)e^{-a})]$

okolo osi o_x :

$$\begin{array}{ll} \text{c) } x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle, & \left[\frac{3\pi}{4} \right] \\ \text{d) } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad x = at, y = 0, a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle. & [3\pi a^2] \end{array}$$

6. Vypočítajte dĺžku danej krivky:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = 2\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 2. & \left[\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2\sqrt{6} + 5}{2\sqrt{2} + 3} \right] \\ \text{b) } y^2 = 4x^3, y > 0, 0 \leq x \leq 2. & \left[2 \frac{\sqrt{19^3 - 1}}{27} \right] \\ \text{c) } y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}. & \left[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right] \\ \text{d) } y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \ln 2 \leq x \leq \ln 5. & \left[\ln \frac{16}{3} \right] \end{array}$$

7. Vypočítajte dĺžku krivky:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x = t^2, y = t - \frac{t^3}{3}, t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle. & [2\sqrt{3}] \\ \text{b) } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \quad a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle. & [8a] \\ \text{c) } x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0. & [2\pi^2 a] \\ \text{d) } x = \cos^4 t, y = \sin^4 t. & \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \end{array}$$

8. Vypočítajte plošný obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou danej krivky okolo osi o_x :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x = 4 - 4\sqrt{t}, y = \frac{4\sqrt{t^3}}{3}, t \in \langle 0, 1 \rangle. & \left[16\pi \frac{2\sqrt{2} - 1}{9} \right] \\ \text{b) } x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0. & \left[\frac{12\pi a^2}{5} \right] \\ \text{c) } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \quad a > 0, t \in \langle 0, \pi \rangle. & \left[\frac{32\pi a^2}{3} \right] \\ \text{d) } y = x^3, -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}. & \left[\frac{196\pi}{27^2} \right] \\ \text{e) } y = \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq \frac{3}{4}. & \left[\pi \left(\frac{255}{1024} - \frac{\ln 2}{8} \right) \right] \end{array}$$

9. Vypočítajte statické momenty homogénneho hmotného obdĺžníka so stranami a, b vzhľadom na obe jeho strany (s plošnou hustotou σ).

$$\left[\frac{1}{2} \sigma ab^2, \frac{1}{2\sigma a^2 b} \right]$$

10. Vypočítajte statické momenty homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej krivkou

$x = t^2 - t$, $y = t^3 + t^2$ a osou o_x vzhľadom na súradnicové osi.

$$\left[S_x = \frac{3\sigma}{280}, S_y = \frac{83\sigma}{420} \right]$$

11. Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej parabolou $y^2 = 6x$ a priamkou $x - 5 = 0$. $[3, 0]$

12. Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti ohraničenej parabolou $y = 2x - x^2$ a osou o_x .

$$\left[1, \frac{2}{5} \right]$$

13. Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti, ktorá leží v prvom kvadrante, ak je ohraničená

parabolou $y^2 = 2px$ a priamkami $y = 0$, $x = x_0$.

$$\left[\frac{3x_0}{5}, \frac{3y_0}{8} \right]$$

14. Nájdite ťažisko homogénnej hmotnej oblasti určenej nerovnosťami $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$.

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} \right]$$