Nevlastný integrál

Definícia nevlastného integrálu

Určitý integrál sme definovali z ohraničenej funkcie *f* na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$. Ak je interval neohraničený, t.j. $a=-\infty$ alebo $b=\infty$ alebo funkcia *f* nie je ohraničená, tak definícia integrálu pomocou integrálnych súčtov nie je možná.

Definícia 9.1 Nech $-\infty < a < b < +\infty$ a a nech funkcia *f* je integrovateľná na každom intervale $\langle a,t\rangle$, *t*<*b*. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$, tak ju nazývame ***nevlastný integrál funkcie f*** na intervale $\langle a,\infty\rangle$. Píšeme $\int_a^\infty f(x)dx := \lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ a čítame integrál z funkcie *f* od *a* po nekonečno.

Poznámka Ak $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = +\infty$, resp. $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = -\infty$, tak hovoríme, že integrál $\int_a^\infty f(x)dx$ diverguje do $+\infty$, resp. do $-\infty$. Ak $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ neexistuje hovoríme, že $\int_a^\infty f(x)dx$ neexistuje.

Podobne môžeme definovať nevlastný integrál $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Príklad Vypočítajme plošný obsah časti roviny ležiacej v prvom kvadrante ohraničenej krivkou $y=e^{-x}$ a priamkou $y=0$.

Riešenie Plošný obsah časti roviny je $P=\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left\{-e^{-b}\right\}-\left\{-e^0\right\}=1$.

Integrál z neohraničenej funkcie

Definícia 9.2 Nech je funkcia f definovaná na ohraničenom intervale $\langle a,b)$ a nech v každom intervale $(b-\delta,b), b-a>\delta>0$ je neohraničená. Nech pre každé $x\in\langle a,b)$ existuje $\int_a^x f(t)dt$. Ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(x)dx$ hovoríme, že $\int_a^b f(x)dx$ konverguje a píšeme $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(x)dx$ a nazývame ho nevlastným integrálom funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$.

Podobne definujeme integrál z funkcie *f* neohraničenej v bode *a*.

Príklad Vypočítajme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Riešenie Pre každé $x \in \langle 0,1)$ platí $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin x$.

Preto $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.