L'Hospitalovo pravidlo

Doteraz sme uviedli niektoré pravidlá pre výpočet limít. Pri praktickom výpočte limít môžeme vypočítať niektoré limity pohodlnejšie, použitím derivácie.

Veta 4.11 Nech funkcie f, g majú derivácie v prstencovom okolí bodu $a \in \mathbf{R}^*$ a nech

1. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

alebo

2. $\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Veta platí aj pre jednostranné limity.

Poznámka Z existencie $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ nevyplýva existencia $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Príklad *Vypočítajme* $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}$.

Riešenie. Opakovaným použitím L'Hospitalovho pravidla dostávame

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = +\infty.$$

Limity, ktoré sú neurčitými výrazmi typu $0.\infty$, $\infty - \infty$ upravujeme použitím vzťahov

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \quad f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

na limity typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

K ďalším typom neurčitých výrazov vedie výpočet limity z $f(x)^{g(x)}$, kde $f(x) > 0$. Podobne ako pri výpočte derivácie z tejto funkcie si ju zapíšeme v tvare

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$