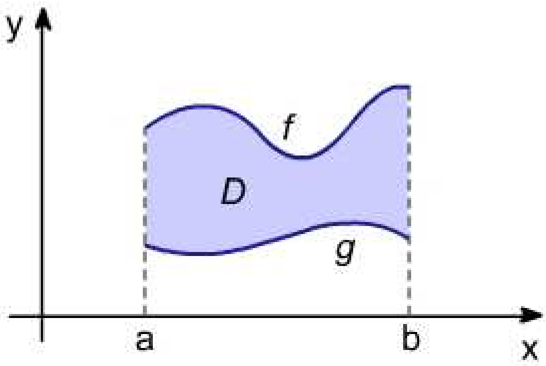
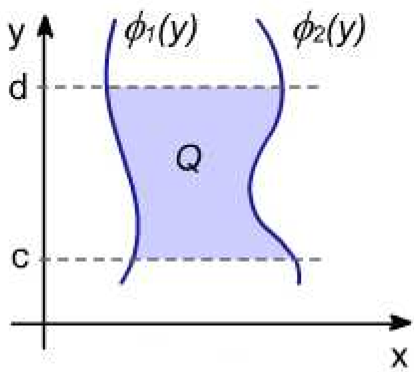
Geometrické aplikácie určitého integrálu

Definícia 8.1 Nech funkcie $f:\langle a,b\rangle \to R$, $g:\langle a,b\rangle \to R$ sú spojité a nech pre každé $x\in(a,b)$ je $f(x)\le g(x)$. Potom množinu $D=\{(x,y)\in R^2\ a\le x\le b,\ g(x)\le y\le f(x)\}$ nazývame ***elementárna oblasť*** v R^2 ***vzhľadom na os*** o_x (elementárna oblasť typu $[x,y]$).



Definícia 8.2 Nech funkcie $\phi_1:\langle c,d\rangle \to R$, $\phi_2:\langle c,d\rangle \to R$ sú spojité a nech pre každé $y\in(c,d)$ je $\phi_1(y)<\phi_2(y)$. Potom množinu $Q=\{(x,y)\in R^2\ c\le y\le d,\ \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\}$ nazývame ***elementárna oblasť*** v R^2 ***vzhľadom na os*** o_y (elementárna oblasť typu $[x,y]$).



- ***Plošný obsah rovinných útvarov***

Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca $P=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$.

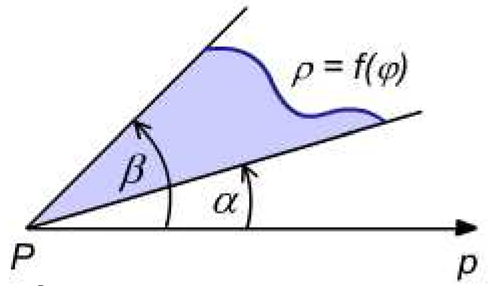
Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca $P=\int_c^d [\phi_2(y)-\phi_1(y)]dy$.

V istej krajine tak slabo platili matematikov, že profesorovi matematiky na technickej univerzite neostávalo nič iné iba sa zamestnať v istej firme ako robotník. Keďže firma chcela prosperovať, tak ponúkla „robotníkom " možnosť zvýšenia odbornosti, po ktorom by nasledovalo zvýšenie zárobku. *Profesor matematiky si na hodine podriemkaval, až ho zaskočila otázka učiteľa, ako by vypočítal plochu kruhu. Rozospatý profesor si nespomenul ihneď na vzorec, ale spomenul si na postup, ako vypočítať plošný obsah rovinného obrazca. Napísal si parametrické rovnice kružnice, spomenul si na vzorec pre výpočet plochy a dostal hodnotu* $-\pi r^2$. *Zo všetkých lavíc sa od „ robotníkov" ozvalo: „Musíš zmeniť hranice integrovania! ".*

Nech f je nezáporná spojitá funkcia na intervale $\langle a,b\rangle$, ktorá je daná **parametrickými rovnicami** $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in\langle\alpha,\beta\rangle$, kde funkcia φ má spojitú deriváciu rôznu od nuly na intervale

(α, β). Potom plošný obsah P krivočiareho lichobežníka A počítame podľa vzorca $P = \int_\alpha^\beta \psi(t)|\varphi'(t)|dt$.

Nech $\rho = f(\varphi)$ je rovnica krivky v **polárnych súradniciach**, kde f je nezáporná spojitá funkcia na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle, \beta - \alpha \le 2\pi$. Rovinný útvar ohraničený polpriamkami $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ a krivkou $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$ nazveme *"krivočiary výsek"*. Je to množina



$K = \{(x, y) \in R^2, x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi, \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle, \ 0 \le \rho \le f(\varphi)\}$.

Plošný obsah množiny K sa počíta pomocou vzorca $P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi$.

- ***Dĺžka krivky***

Ak krivka C je grafom $f : \langle a, b \rangle \to R$, ktorá má spojitú deriváciu, tak pre jej dĺžku s platí

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Nech C je jednoduchá hladká krivka určená parametrickými rovnicami $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Potom pre jej dĺžku platí vzorec

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

ktorý stručne zapisujeme takto $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$.

Ak je krivka daná v polárnych súradniciach $\rho = g(\varphi), \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle, 0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, kde funkcia g má spojitú deriváciu, môžeme krivku C popísať parametrickými rovnicami
$x = g(t)\cos t, \ y = g(t)\sin t, \quad t = \varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$.
Ak použijeme vzorec pre výpočet dĺžky krivky danej parametricky, dostaneme

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi.$$

Podobne ako v rovine môžeme počítať dĺžku priestorovej krivky.

Dĺžku priestorovej krivky C danej parametrickými rovnicami $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ môžeme počítať podľa vzorca $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$.

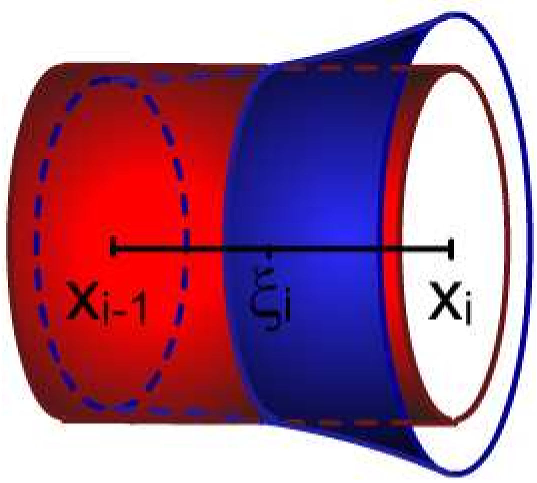
- ***Objem rotačného telesa***

Majme v rovine $(o;x,y)$ krivočiary lichobežník *A*, kde f je spojitá nezáporná funkcia na intervale $\langle a,b\rangle$. Rotáciou krivočiareho lichobežníka, v priestore R^3 s osami *x, y, z*, okolo x - ovej osi vznikne rotačné teleso, ktorého objem *V* vypočítame pomocou vzorca

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(\xi_i)\,\Delta x_i=\pi\int_a^b f^2(x)dx,$$

ktorý stručne zapisujeme takto

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx.$$



Ak funkcia f je daná parametrickými rovnicami $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$, kde ψ je nezáporná spojitá funkcia a funkcia φ má spojitú nenulovú deriváciu, tak pre objem rotačného telesa platí vzorec

$$V=\pi\int_a^b\psi^2(t)|\varphi'(t)|dt.$$

- ***Plošný obsah rotačnej plochy***

Plošný obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu spojito diferencovateľnej, nezápornej funkcie $f:\langle a,b\rangle\to R$, okolo osi *x* sa počíta pomocou vzorca $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

Ak je krivka daná parametricky, tak $S=\int_\alpha^\beta\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$.