Vlastnosti spojitých funkcií na intervale

Hovoríme, že funkcia f je spojitá na uzavretom intervale J práve vtedy, keď je spojitá v každom vnútornom bode intervalu J a ak v začiatočnom, resp. koncovom bode intervalu je spojitá sprava, resp. zľava.

> **Veta 3.12** Nech $f : A \to \mathbf{R}$ a nech $a \in A$ je hromadným bodom množiny A. Potom ***funkcia*** $f : A \to \mathbf{R}$ ***je spojitá v bode*** $a \in A$ práve vtedy, keď $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dôležitou vlastnosťou, ktorá súvisí so spojitosťou funkcie je rovnomerná spojitosť funkcie.

Definícia 3.7 ***Funkcia*** f sa nazýva ***rovnomerne spojitá na množine*** A, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ také , že pre každé dva body $x, x' \in A$ pre ktoré je $|x - x'| < \delta$ platí $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Spojité funkcie na uzavretom intervale $I = \langle a, b \rangle$ majú napríklad tieto veľmi dobré vlastnosti:

- Každá funkcia f spojitá na uzavretom intervale I je ohraničená na I .
- Každá funkcia f spojitá na uzavretom intervale I nadobúda na tomto intervale najmenšiu a najväčšiu hodnotu, t.j. existujú body $c, d \in \langle a, b \rangle$ také, že $f(c) = \sup_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) = \max_{x \in \langle a,b \rangle} f(x)$,

  $f(d) = \inf_{x \in \langle a,b \rangle} f(x) = \min_{x \in \langle a,b \rangle} f(x)$.
- Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, tak je na tomto intervale rovnomerne spojitá.
- Každá funkcia rovnomerne spojitá na A je spojitá na A .
- Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a) f(b) < 0$, tak existuje bod $c \in (a, b)$ taký, že $f(c) = 0$.