Fyzikálne aplikácie určitého integrálu

Nech P je hmotný bod s hmotnosťou m v rovine α a q je priamka, ktorá tiež leží v rovine α. Priamka q rozdeľuje rovinu α na dve polroviny, z ktorých jednu budeme považovať za kladnú a druhú za zápornú.
Statickým momentom S_q bodu P vzhľadom na priamku q nazveme číslo $S_q(P) = vm$ kde $|v|$ je vzdialenosť bodu P od priamky q a v je kladné (záporné) v prípade, že P leží v kladnej (zápornej) polrovine.

Statický moment sústavy hmotných bodov $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$ s hmotnosťami $m_1 = m(x_1,y_1),\ m_2 = m(x_2,y_2),\ldots,\ m_n = m(x_n,y_n)$ vzhľadom na os o_x, resp. na os o_y je

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

Moment zotrvačnosti tejto sústavy hmotných bodov vzhľadom na os o_x, resp. na os o_y je

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} m_i, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} m_i$$

Nech je v priestore $(0;x,y,z)$ daná sústava hmotných bodov $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ s hmotnosťami $m_i, i = 1,2,\ldots,n$. Statický moment tejto sústavy hmotných bodov vzhľadom na každú zo súradnicových rovín o_{xy}, o_{xz}, o_{yz} je

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} z_i m_i, \quad S_{xz} = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \quad S_{yz} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \quad .$$

Moment zotrvačnosti tejto sústavy hmotných bodov vzhľadom na každú zo súradných osí o_x, o_y, o_z je

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{\,2} + z_i^{\,2}\right) m_i, \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{\,2} + z_i^{\,2}\right) m_i, \quad I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{\,2} + y_i^{\,2}\right) m_i .$$

Ťažisko takejto sústavy konečného počtu hmotných bodov je hmotný bod $T = (x_t, y_t)$ s hmotnosťou $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ ktorý má rovnaké statické momenty vzhľadom na osi o_x, o_y ako má celá sústava hmotných bodov. Teda je to bod, pre ktorý platí $y_t m = S_x, \quad x_t m = S_y,$.

Z toho potom dostávame $x_t = \dfrac{S_y}{m}, \quad y_t = \dfrac{S_x}{m}$.

- ***Statické momenty a momenty zotrvačnosti hmotného oblúka***

Uvažujme homogénnu jednoduchú po častiach hladkú krivku C v rovine, vyjadrenú parametrickými rovnicami $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Predpokladajme, že funkcie φ, ψ sú spojito diferencovateľné na $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pre statické momenty hmotného homogénneho oblúka s konštantnou dĺžkovou hustotou μ_0 platí

$$S_x = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt, \quad S_y = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt,$$

ktoré stručne zapíšeme takto $S_x = \mu_0 \int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$, $S_y = \mu_0 \int_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$.

Moment zotrvačnosti hmotného oblúka C vzhľadom na os o_x, resp. na os o_y je

$$S_x = \mu_0 \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt, \quad S_x = \mu_0 \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Hmotnosť m hmotného oblúka C s konštantnou dĺžkovou hustotou je

$$m = \mu_0 \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

- ***Statické momenty hmotnej rovinnej oblasti***

Majme hmotnú oblasť D, ktorej tvar je určený elementárnou oblasťou $D = \{(x, y) \in R^2, a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$, kde funkcia f je spojitá na tomto intervale. Statický moment hmotnej homogénnej oblasti s plošnou hustotou μ_0 vzhľadom na os o_x, resp. na os o_y je

$$S_x = \frac{\mu_0}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx, \quad S_y = \mu_0 \int_a^b x f(x)\,dx.$$

- ***Práca premennej sily***

Práca A konštantnej sily $\vec{F}$ po orientovanej priamej dráhe $s = \overrightarrow{PQ}$ je definovaná skalárnym súčinom $A = \vec{F}.\vec{s}$. Nech f je spojitá funkcia na intervale $\langle a, b\rangle$. Pre prácu A premennej sily $\vec{F} = f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ platí $A = \int_a^b f(x)\,dx$.