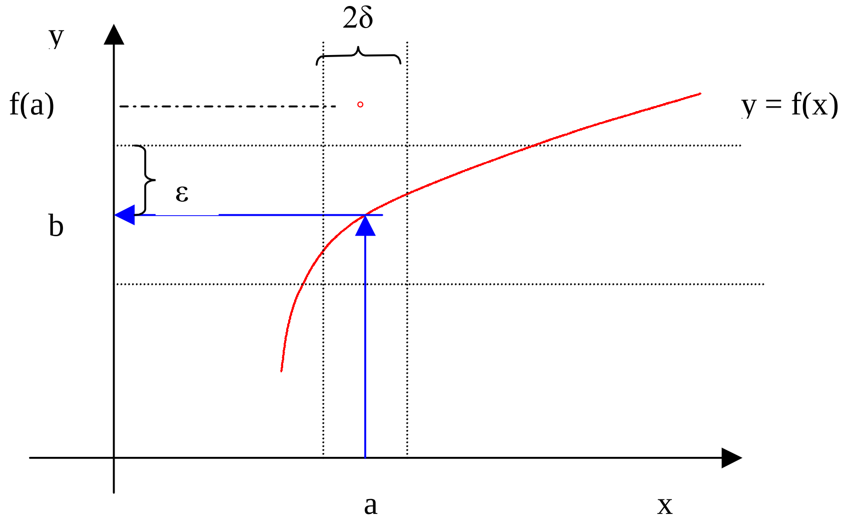
Limita funkcie

Ak povieme, že funkcia $f: A \to \mathbf{R}$ má v čísle a limitu číslo b, tak chceme vyjadriť tú skutočnosť, že $f(x)$ je "veľmi blízko" k b, ak x je "dostatočne blízko" k a.

Definícia 3.1 Nech $A \subset \mathbf{R}$ a nech $a \in \mathbf{R}^*$. Bod a nazývame ***hromadným bodom*** množiny A, keď každé prstencové okolie $O^\circ(a)$ obsahuje aspoň jeden bod $z \in A$. Bod $a \in A$, ktorý nie je hromadným bodom množiny A, nazývame ***izolovaným bodom*** množiny A.

Príklad *Body 1, 5 sú hromadné body intervalu* $\langle 1,5 \rangle$. *Bod 4 je hromadným bodom intervalu* $(0,5)$. *Hromadným bodom intervalu* $(5,+\infty)$ *je* $+\infty$. *Jediným hromadným bodom množiny* $\mathbf{N}$ *je* $+\infty$.

Definícia 3.2 Nech $f: A \to \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}^*$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Ak pre každé $O_\varepsilon(b)$ existuje také prstencové okolie $O_\delta^\circ(a)$, že $f\left(O_\delta^\circ(a) \cap A\right) \subset O_\varepsilon$ hovoríme, že funkcia $f: A \to \mathbf{R}$ má v bode a limitu b. Píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alebo $f(x) \to b \, (x \to a)$.



Zapisujeme to takto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall O_\varepsilon(b)) \quad (\exists O_\delta^\circ(a)): f\left(O_\delta^\circ(a) \cap A\right) \subset O_\varepsilon(b)$$

Veta 3.1 Nech $f: A \to \mathbf{R}$ a nech a je hromadným bodom množiny A. Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_1$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b_2$, tak $b_1 = b_2$.

Veta 3.2 Nech $f: A \to \mathbf{R}$ a nech a je hromadným bodom množiny $C \subset A$ a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Potom aj $\lim\limits_{x \to a} f_{|C}(x) = b$.

Definícia 3.3 Nech $f: A \to \mathbf{R}$ a nech a je hromadným bodom množiny $C = \langle a, \infty) \cap A$ a $D = (-\infty, a\rangle \cap A$ a teda je hromadným bodom aj A.

Ak a je hromadným bodom C a $\lim\limits_{x \to a} f_{|C}(x) = b$, hovoríme, že ***b je limitou sprava*** funkcie $f: A \to \mathbf{R}$ ***v bode a,*** pričom píšeme $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ alebo $f(x+0) = b$.

Ak a je hromadným bodom D a $\lim\limits_{x \to a} f_{|D}(x) = b$, hovoríme, že ***b je limitou zľava*** funkcie $f: A \to \mathbf{R}$ ***v bode a,*** pričom píšeme $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$ alebo $f(x-0) = b$.

Poznámka Ak $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, a je hromadným bodom množín C, D, tak $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Veta 3.3 Nech $f: A \to \mathbf{R}$ je funkcia a nech a je hromadným bodom množín C, D. Potom $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ práve vtedy, keď $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Veta 3.4 Nech $f: A \to \mathbf{R}$ je funkcia a nech a je hromadným bodom množiny $C = A \cap O_\tau(a)$. Ak $\lim\limits_{x \to a} f_{|C}(x) = b$, tak aj $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.