Limita zloženej funkcie, nerovnosti pre limity a body nespojitosti funkcie

Veta 3.13 Nech $g : A \to B$, $f : B \to C$ a nech a je hromadným bodom množiny A, $\lim_{x \to a} g(x) = b$, b je hromadným bodom množiny B a $\lim_{u \to b} f(u) = c$. Naviac nech je splnená jedna z nasledujúcich podmienok:

1. f je spojitá v bode b.
2. Existuje prstencové okolie $O_\delta^\circ(a)$ také, že pre $x \in O_\delta^\circ(a) \cap A$ je $g(x) \neq b$.

Potom $\lim_{x \to a} f(g(x)) = c$.

Veta 3.14 Nech $f : A \to \mathbf{R}$, $g : A \to \mathbf{R}$ a nech existujú limity $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = b_2$ a prstencové okolie $O_\delta^\circ(a)$ také, že pre každé $x \in O_\delta^\circ(a) \cap A$ je $f(x) \leq g(x)$. Potom $b_1 \leq b_2$.

Veta 3.15 Ak v istom prstencovom okolí $O_\delta^\circ(a)$ platí: $f(x) \leq g(x)$ a $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, tak $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Veta 3.16 Ak v istom prstencovom okolí $O_\delta^\circ(a)$ platí: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ a $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$, tak $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Príklad *Ukážme, že* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

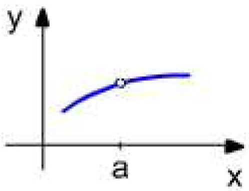
Riešenie. Pre $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Po úprave dostaneme $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Posledná nerovnosť platí aj pre $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (sú to párne funkcie). Pretože $\lim_{x \to 0} 1 = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$, je podľa poslednej vety $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

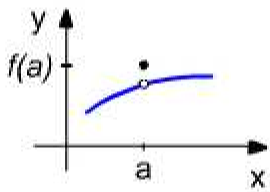
Body nespojitosti funkcie

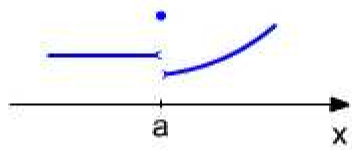
Hromadné body definičného oboru funkcie f, v ktorých funkcia f nie je spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie f. Tieto body môžeme zatriediť do dvoch skupín:

1. Existujú konečné jednostranné limity $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a-} f(x)$.

V tomto prípade bod a nazývame ***bodom nespojitosti prvého druhu***.



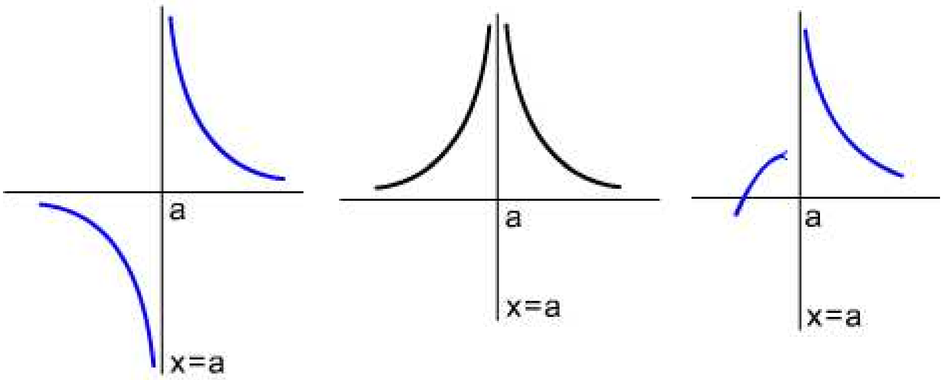




Ak naviac existuje konečná limita $\lim_{x \to a} f(x) = b$, tak bod a nazývame odstrániteľným bodom nespojitosti funkcie f.

2. Ak aspoň jedna z jednostranných limít
   $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a-} f(x)$

neexistuje alebo je nevlastná, tak bod a nazývame ***bodom nespojitosti druhého druhu***.



Definícia 3.8 Funkcia f sa nazýva ***po častiach spojitá*** na intervale $\langle a, b \rangle$, ak má na intervale $\langle a, b \rangle$ najviac konečný počet bodov nespojitosti a tieto body sú body nespojitosti prvého druhu.