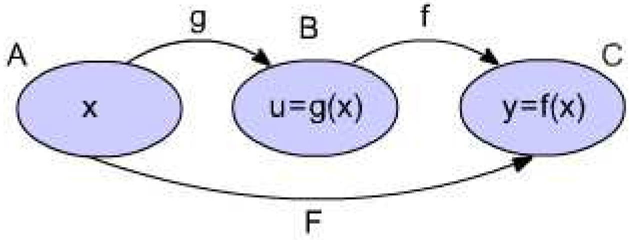
Zložená funkcia

Definícia 2.8 Nech $g: A \to B$, $f: B \to C$, Potom funkciu $f \circ g: A \to C$, $f \circ g(x) = f(g(x))$ nazývame ***zloženou funkciou*** z funkcie $g: A \to B$ a $f: B \to C$ v tomto poradí.



Poznámka Funkcia $g: A \to B$ priraďuje každému prvku $x \in A$ prvok $u = g(x) \in B$. Funkcia $f: B \to C$ priraďuje každému prvku $u \in B$ prvok $f(u) \in C$. Teda každému prvku $x \in A$ je priradený práve jeden prvok $y = f(g(x)) \in C$.

Príklad *Nech* $g: \langle 1,2 \rangle \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2x - 3 = u$ *a* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(u) = 5u^3 + 2u - 3$. *Môžeme utvoriť zloženú funkciu* $f(g(x)) = 5(2x-3)^3 + 2(2x-3) - 3$.

Inverzná funkcia

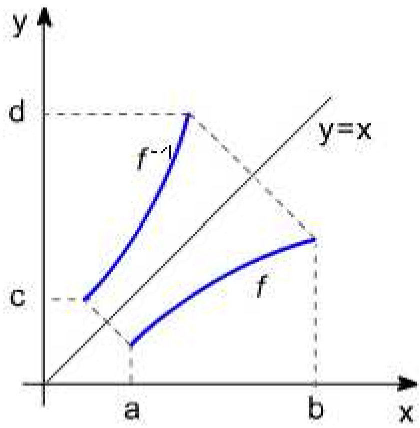
Definícia 2.9 Nech $f: A \to B$.

a) Ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkciu f nazývame ***injekciou*** alebo ***injektívnou funkciou (injektívnym zobrazením alebo prostým zobrazením).***

b) Ak $H(f) = B$, hovoríme, že funkcia f je ***surjekciou*** alebo ***surjektívnou funkciou*** alebo ***surjektívnym zobrazením alebo zobrazením vzhľadom na*** B.

c) Ak funkcia f je injektívna aj surjektívna funkcia vzhľadom na B, tak hovoríme, že funkcia f je ***bijekciou*** alebo ***bijektívnou funkciou*** alebo ***bijektívnym zobrazením vzhľadom na*** B.

Definícia 2.10 Nech $f: A \to B$ je bijekcia. Funkciu $f^{-1}: B \to A$, $f^{-1}(y) = x$ nazývame ***inverznou funkciou*** k funkcii $f: A \to B$ práve vtedy, keď $f(x) = y$.

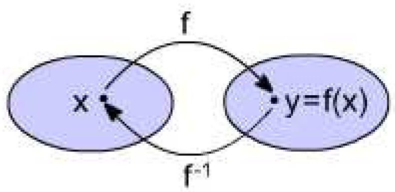


Z definície inverznej funkcie priamo vyplýva nasledujúca veta.

Veta 2.1 Nech $f: A \to B$ je bijekcia a $f^{-1}: B \to A$ je k nej inverzná funkcia. Potom

a) $\forall x \in A: f^{-1}(f(x)) = x$,

b) $\forall y \in b: f(f^{-1}(y)) = y$.



Vo veľmi jednoduchých príkladoch, keď funkcia f je definovaná analyticky nie príliš zložitým vzorcom, vieme inverznú funkciu "vypočítať" tak, že riešime rovnicu $f(x) = y$ vzhľadom na x.

Príklad *Funkcia* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $y=3x-5$ *je bijekciou. Riešením rovnice* $y=3x-5$ *vzhľadom na* x *dostaneme* $x=\dfrac{y+5}{3}$. *Ak zameníme písmena* $x\leftrightarrow y$, *tak* $f^{-1}(x)=y=\dfrac{x+5}{3}$.

Inverznú funkciu $f^{-1}(x)$ *k funkcii* f *môžeme určiť tiež pomocou poslednej vety:* $\forall x\in B=(-\infty,\infty):\ f\left(f^{-1}(x)\right)=x=3f^{-1}(x)-5$. *Po úprave dostávame* $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}$.

Ak funkcia f je na definičnom obore rýdzo monotónna, je zrejme prostá a teda existuje k nej inverzná funkcia f^{-1}. Táto funkcia je tiež rýdzo monotónna (ak funkcia f je rastúca (klesajúca), tak funkcia f^{-1} je tiež rastúca (klesajúca)).