1. *Nájdite inverznú funkciu k funkcii* $f : y = \dfrac{x-1}{2-3x}$.

Riešenie:

Funkcia f je prostá na celom svojom definičnom obore $D(f) = R - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$, preto k nej existuje inverzná funkcia na celom jej definičnom obore.

$$y = \frac{x-1}{2-3x}$$

vymeníme navzájom x a y

$$x = \frac{y-1}{2-3y}$$

a vyjadríme y ako neznámu z predchádzajúcej rovnice

$$2x - 3xy = y - 1$$
$$2x + 1 = y(3x+1)$$
$$y = \frac{2x+1}{3x+1}$$

Inverzná funkcia je $f^{-1} : y = \dfrac{2x+1}{3x+1}$ s definičným oborom $D\left(f^{-1}\right) = R - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$.

2. *Zderivujte funkciu* $f(x) = \sqrt{3-x}\,.\,\arccos\dfrac{3-2x}{5} + \dfrac{\ln(x-1)}{x^2+2}$.

Riešenie:
Funkciu zderivujeme pomocou základných derivačných vzorcov a vzorcov pre výpočet derivácie súčinu a podielu funkcií, výsledok necháme v neupravenom tvare.

$$f'(x) = \left(\sqrt{3-x}\,.\,\arccos\frac{3-2x}{5} + \frac{\ln(x-1)}{x^2+2}\right)' = \left(\sqrt{3-x}\right)'.\,\arccos\frac{3-2x}{5} + \sqrt{3-x}\,.\left(\arccos\frac{3-2x}{5}\right)' +$$

$$+ \frac{(\ln(x-1))'.(x^2+2) - \ln(x-1).(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}.\arccos\frac{3-2x}{5} + \sqrt{3-x}.\frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3-2x}{5}\right)^2}} + \quad .$$

$$+ \frac{\frac{1}{x-1}.(x^2+2) - \ln(x-1).2x}{(x^2+2)^2}$$

3. *Vyšetrite priebeh funkcie a načrtnite jej graf* $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

Riešenie:
Funkcia je definovaná pre všetky čísla x, pre ktoré je menovateľ $x - 2 \neq 0$, teda $x \neq 2$.
Definičný obor funkcie $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$$

Jednostranné limity v bode nespojitosti $x=2$ sú

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$$

pretože jednostranné limity sú nevlastné čísla, priamka $x=2$ je ABS.

Hľadáme asymptoty so smernicou (ASS)

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1$$

$$q_1=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=2$$

pretože k_1 a q_1 sú vlastné čísla, ASS pre $x\to\infty$ je priamka $y=x+2$,

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1$$

$$q_2=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=2$$

pretože k_2 a q_2 sú vlastné čísla, ASS pre $x\to-\infty$ je takisto priamka $y=x+2$.

Vyšetríme párnosť, resp. nepárnosť funkcie

$\underline{f(-x)}=\frac{(-x)^2}{-x-2}=-\frac{x^2}{x+2}\neq\underline{\pm f(x)}$, z toho vyplýva, že funkcia nie je ani párna ani nepárna.

Ideme hľadať priesečníky s osami o_x a o_y.

Vo funkcii $y=\frac{x^2}{x-2}$ položíme $x=0$ a vypočítame $\qquad y=\frac{0}{0-2}=0$.

Vo funkcii $y=\frac{x^2}{x-2}$ položíme $y=0$ a vypočítame

$$0=\frac{x^2}{x-2}$$
$$0=x^2$$
$$0=x$$

priesečník s osou o_x a s osou o_y je bod $[0,0]$.

Prvá derivácia funkcie je $y'=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$.

Položíme $\qquad y'=0 \qquad$ a vypočítame SB.

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}=0$$

$$x(x-4)=0$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=4$$

y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x=2$, ktorý je zároveň aj bodom nespojitosti funkcie $f(x)$.

Druhá derivácia funkcie je

$$y''=\left(\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{8}{(x-2)^3}$$

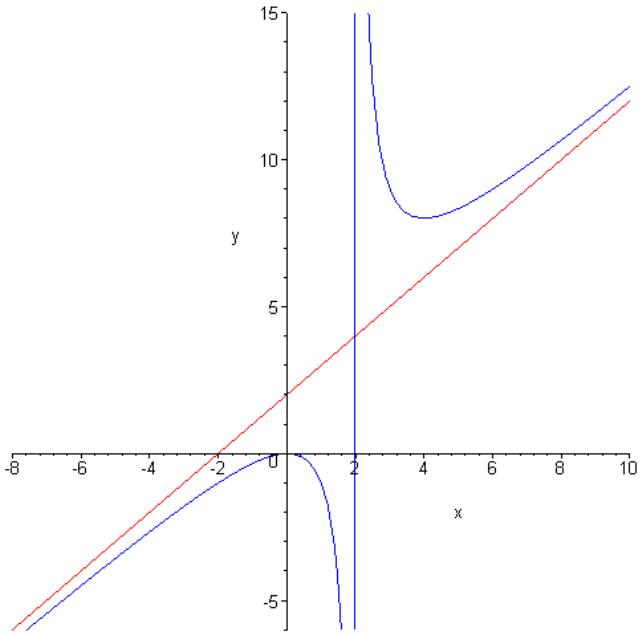
Druhá derivácia $y''\neq 0$, preto funkcia $f(x)$ nemá inflexné body.

y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x=2$, čo je aj bod nespojitosti funkcie $f(x)$.

Body $x=0$ a $x=4$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,\infty)$
y'	+		-	*	-		+
y	↗	MAX	↘	*	↘	MIN	↗
y''	-		-	*	+		+
y	$\cap$	0	$\cap$	ABS	$\cup$	8	$\cup$

Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie.



4. *Vypočítajte* $\int \frac{dx}{x\left(\ln^2 x + 4\ln x + 8\right)}$.

Riešenie:
Na výpočet tohto typu integrálu je vhodná substitučná metóda, kde substitúcia bude $\ln x = t$. Po jej použití dostaneme integrál, ktorý sa dá pomocou úpravy menovateľa na štvorec a použitím ďalšej substitúcie $t + 2 = u$ previesť priamo na integračný vzorec $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$

$$\int \frac{dx}{x\left(\ln^2 x + 4\ln x + 8\right)} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\left(t^2 + 4t + 8\right)} = \int \frac{dt}{\left(t+2\right)^2 + 4} = \left| \begin{array}{l} t + 2 = u \\ dt = du \end{array} \right| = .$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+2}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x + 2}{2}\right) + c.$$

5. *Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkami* $y = \left(x+1\right).\cos x, \quad y = 0, \quad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Riešenie:
Počítame obsah elementárnej oblasti, ktorá sa dá popísať v karteziánskych súradniciach takto

$$\begin{array}{l} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le \left(x+1\right).\cos x \end{array}.$$

Na výpočet plošného obsahu použijeme vzorec $P = \int_a^b \left[f\left(x\right) - g\left(x\right)\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(x+1\right)\cos x - 0\right] dx =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x+1\right)\cos x \, dx .$$

Tento integrál vypočítame pomocou metódy per partes.

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(x+1\right)\cos x\right] dx = \left| \begin{array}{ll} u = x + 1 & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = \left[\left(x+1\right)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[\left(x+1\right)\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$