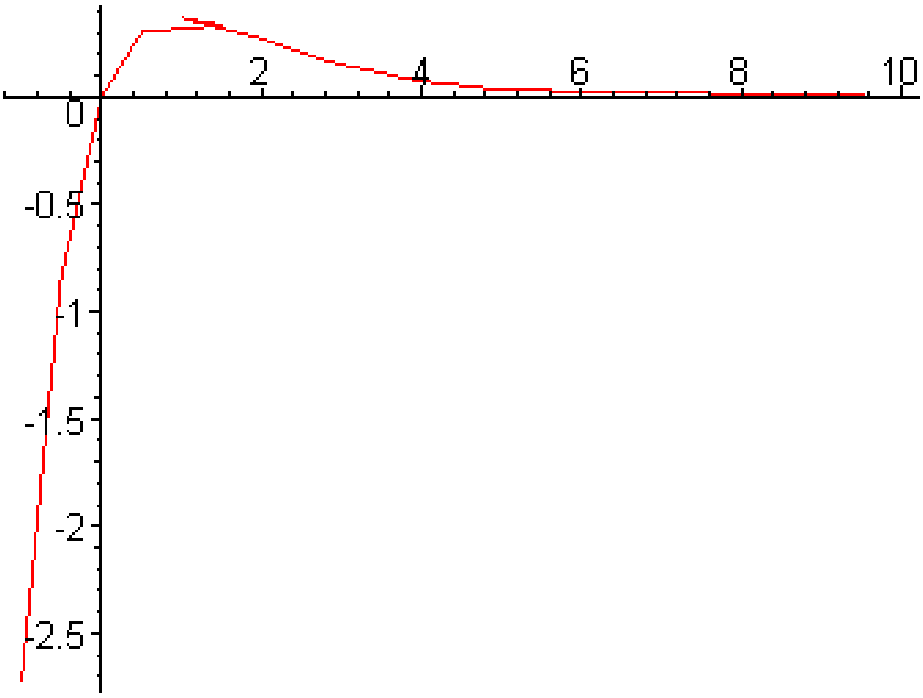
Príklad 5.2 *Nájdime priebeh funkcie* $f(x) = xe^{-x}$ *a zostrojme jej graf.*

Riešenie. Najprv sa pokúsime zostrojiť niekoľko bodov grafu danej funkcie. Je zrejmé, že oborom definície danej funkcie je množina $D(f) = (-\infty, \infty)$. Tieto body pospájame úsečkami. Dostaneme v danej časti približne graf danej funkcie.



”Zhruba vieme aký má tvar ” graf danej funkcie. Z grafu usudzujeme, že funkcia nemôže byť periodická a ani párna, resp. nepárna. Teraz použitím derivácií určíme presnejšie niektoré vlastnosti danej funkcie. Dostávame $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Pretože daná funkcia je spojitá na celom obore definície, je $f'(x) = (1-x)e^{-x} = 0$ pre $x = 1$. Teda na intervaloch $(-\infty,1), (1,\infty)$ prvá derivácia nemení znamienko. Pretože $f'(0) = (1-0)e^{-0} = 1 > 0,$ funkcia je rastúca na celom intervale $(-\infty,1)$. Podobne $f'(2) = (1-2)e^{-2} = -1e^{-2} < 0,$ je funkcia klesajúca na $(1,\infty)$.

Podobne $f''(x) = (x-2)e^{-x} = 0$ pre $x = 2$. Pretože $f''(0) = (0-2)e^{-0} = -2 < 0$, je druhá derivácia danej funkcie záporná na celom intervale $(-\infty,2)$ a teda funkcia f je na tomto intervale konkávna. Podobne zistíme, že $f''(3) = (3-2)e^{-3} = 1e^{-3} > 0$, teda funkcia f je na intervale $(2,\infty)$ konvexná. V bode $x = 1$ je druhá derivácia záporná a pretože prvá derivácia je nulová, funkcia má v tomto bode *lokálne maximum* $= 1.e^{-1}$.

V bode $x = 2$ sa funkcia mení z konkávnej na konvexnú a teda funkcia má v bode 2 inflexný bod.

Teraz vyšetríme asymptoty grafu funkcie. Pretože funkcia má spojitú všade prvú deriváciu, nemá asymptoty bez smernice. Ak priamka $y = k_1x + q_1$ je asymptotou grafu funkcie potom

$$k_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, q_1 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_1x).$$

Výpočtom dostávame $k_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$, teda limita je nevlastná a graf funkcie pre $x \to -\infty$ nemá asymptotu.

Ak priamka $y = k_2x + q_2$ je asymptotou grafu funkcie potom $k_2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, q_2 = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - k_2x)$.

Výpočtom dostávame $k_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ a

$$q_2 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to\infty}(x e^{-x} - 0.x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Teda priamka $y = k_2 x + q_2 = 0.x + 0$ je asymptotou grafu funkcie so smernicou pre $x \to +\infty$.

Využitím získaných údajov môžeme presnejšie zostrojiť graf danej funkcie.
Presnejší graf funkcie má tvar