Cvičenia

Matematik cestuje vo vlaku a stále niečo počíta. Cestujúca babka sa ho pýta, čo to robí. Matematik vysvetľuje, že si overuje svoje vedomosti a spočítava napríklad stromy v lese. Babka ho ide preskúšať, či skutočne hovorí pravdu. *„Pán matematik, teraz prejdeme okolo pastviska, kde je stádo kráv a ja viem presne koľko sa ich tam pasie, tak ich spočítajte".*
Rýchlik minul pastvisko a matematik zahlásil: *„Je ich 243." „ Ako ste ich dokázali spočítať za takú krátku dobu?" „Je to jednoduché. Počet kráv mi pripomenul funkciu* $f(x) = x(4-x)^3$ *a ak vynásobím číslom 9 lokálne maximum tejto funkcie v bode* $x = 1$*, tak dostanem touto jednoduchou cestou počet pasúcich sa kráv." „A ja to obyčajne riešim cez viazané extrémy",* *hovorí babka. „Jaj, babka, predbehli ste ma o jeden semester ".*

1. Nájdite všetky intervaly, na ktorých sú dané funkcie *f* monotónne:
   a) $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$, $\quad \{(-1/3,\infty)$ rastie, $(-\infty,-1/3)$ klesá$\}$
   b) $f(x) = x + \cos x$, $\quad \{(-\infty,\infty)$ rastie$\}$
   c) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $\quad \{(0,2)$ rastie, $(-\infty,0)$, $(2,\infty)$ klesá$\}$
   d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. $\quad \{(1,\infty)$ rastie, $(-\infty,0)$, $(0,1)$ klesá$\}$
2. Dokážte, že pre všetky x>0 platí nerovnosť $\ln(1+x) < x$.

3. Nájdite všetky lokálne extrémy funkcie f :
   a) $f(x) = x^3 - 12x - 6$, $\quad \{f(2) = -10 - \text{lok. min.};\ f(-2) = 10 - \text{lok. max.}\}$
   b) $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$,
   $$\left\{ f(1) = 0 - \text{lok. max.};\ f\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right) \approx -0{,}05 - \text{lok. min.};\ f\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right) \approx -0{,}76 - \text{lok. min.} \right\}$$
   c) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $\quad \{\text{neex.}\}$
   d) $f(x) = x + \dfrac{2}{1+x^2}$, $\quad \{\text{neex.}\}$
   e) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$, $\quad \{f(3) = 3 - \text{lok. max.}\}$
   f) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $\quad \{f(0) = 0 - \text{lok. min.};\ f(2) = 4e^{-2} - \text{lok. max.}\}$
   g) $f(x) = xe^{1/x}$, $\quad \{f(1) = e - \text{lok. max.}\}$
   h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. $\quad \{f(e) = e - \text{lok. min.}\}$

4. Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby ich súčin bol najväčší.
   $\{14{,}14\}$
5. Nájdite také kladné číslo, aby súčet tohto čísla a jeho prevrátenej hodnoty bol najmenší.
   $\{1\}$

6. Do trojuholníka vpíšte pravouhlý rovnobežník tak, aby jedna jeho strana bola v základni AB a jeho obsah bol najväčší.

$\{$výška rovnob. je h/2, kde h je výška trojuholníka$\}$

7. Aké rozmery musí mať pravouhlý rovnobežník daného obvodu *s*, aby jeho uhlopriečka bola najmenšia?

$\{a = b = s/4\}$

8. Dokážte, že zo všetkých pravouhlých rovnobežníkov daného obvodu má štvorec najväčší obsah.

9. Kruhový valec má daný objem $2\pi a^3$. Aké musia byť jeho rozmery, aby jeho povrch bol najmenší.

$\{$polomer valca r = a , výška h = 2a$\}$

10. Do gule s polomerom *r* vpíšte valec tak, aby mal najväčší plášť.

$\{\text{polomer základne } r = \sqrt{2}R/2, \text{ výška } h = R\sqrt{2}\}$

11. Na priamke $y = 3x - 1$ nájdite taký bod B, aby jeho vzdialenosť od bodu A=[1,-2] bola najmenšia.

$\{$B = (-1/5,-8/5)$\}$

12. Okno, ktoré má tvar rovinného obrazca pozostávajúceho z obdĺžnika a polkruhu nad jednou jeho stranou, má obvod *a*. Aké musia byť rozmery obdĺžnika, aby okno malo najväčší plošný obsah?

$\{x = 2a/(\pi + 4), y = a/(\pi + 4)\}$

13. Nájdite všetky intervaly najväčšej dĺžky, na ktorých dané funkcie sú konvexné, konkávne a nájdite všetky ich inflexné body:

a) $f(x) = x(1-x)^2$,

$\{(-\infty, 2/3) \text{ konkávna}, (2/3, \infty) \text{ konvexná}, x = 2/3 \text{ inflexný bod}\}$

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$,

$\{(-\infty, 0), (0, \infty) \text{ konvexná}\}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$,

$$\begin{Bmatrix} (-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3}) \text{ konkávna}, (-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \infty) \text{ konvexná}, \\ x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3} \text{ inflexné body} \end{Bmatrix}$$

d) $f(x) = x \ln x$, $\{(0, \infty) \text{ konvexná}\}$

e) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. $\{(-\infty, \infty) \text{ konvexná}\}$

15. Zistite priebeh funkcie a zostrojte jej graf:

- $f(x) = x^3 + 3x$,

$$\begin{Bmatrix} \text{D(f) = (-}\infty, \infty\text{), nepárna, nemá body nespojitosti, v bode 0 má nulový bod.} \\ \text{Na (-}\infty, \infty\text{) je rastúca. Na (0, }\infty\text{) je konvexná, na (-}\infty\text{, 0) jekonkávna.} \\ \text{Extrémy nemá. V bode 0 má inflexný bod. Asymptoty nemá.} \end{Bmatrix}$$

- $f(x) = 16x(x-1)^3$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{D(f) = (-}\infty\text{ , }\infty\text{), nie je párna, ani nepárna, nemá body nespojitosti, v bodoch 0,1} \\ \text{má nulové body. Na (1/4 , }\infty\text{) je rastúca, na (-}\infty\text{ ,1/4) je klesajúca.} \\ \text{Na (1, }\infty\text{), (-}\infty\text{ ,-1/4) je konvexná, na (-1/4 , 1) je konkávna. V bode 1/4 má ostré} \\ \text{lokálne maximum. V bodoch 1,-1/4 má inflexné body. Asymptoty nemá.]} \end{array}\right\}$$

- $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{D(f) = (-}\infty\text{ ,0)} \cup \text{(0,}\infty\text{), je nepárna, v bode 0 je nespojitá, nulové body nemá.} \\ \text{Na (-}\infty\text{ ,-1), (1, }\infty\text{) je rastúca, na (-1,1) je klesajúca. Na (0, }\infty\text{), je konvexná,} \\ \text{na (-}\infty\text{ , 0) je konkávna. V bode 1 má ostré lokálne minimum. V bode -1 má} \\ \text{ostré lokálne maximum. Inflexné body nemá. Asymptoty sú x = 0, y = x.} \end{array}\right\}$$

- $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} + x$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{[D(f) = (-}\infty\text{,-1)} \cup \text{(-1,1)} \cup \text{(1,}\infty\text{), je nepárna, v bodoch -1,1 nespojitá.} \\ \text{Na (-}\infty\text{ ,-}\sqrt{2+\sqrt{5}}\text{), (}\sqrt{2+\sqrt{5}}\text{, }\infty\text{)je rastúca, na (-}\sqrt{2+\sqrt{5}}\text{, }\sqrt{2+\sqrt{5}}\text{) je} \\ \text{klesajúca. Na (-}\infty\text{ ,-1), (0,1) je konkávna a na (-1,0), (1,}\infty\text{) je konvexná.} \\ \text{V bode }\sqrt{2+\sqrt{5}}\text{ má ostré lokálne minimum a v bode - }\sqrt{2+\sqrt{5}}\text{ má ostré} \\ \text{lokálne maximum. V bode 0 má inflexný bod. Asymptoty sú x = -1, x = 1, y = x} \end{array}\right\}$$

- $f(x) = x^2 e^{1/x}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{D(f) = (-}\infty\text{ , 0)} \cup \text{(0,}\infty\text{) , nie je párna ani nepárna, v bode 0 je nespojitá.} \\ \text{Na (1/2,}\infty\text{)je rastúca, na (-}\infty\text{ ,0), (0,1/2) je klesajúca. Nulové body} \\ \text{nemá. Na (-}\infty\text{ ,0), (0,}\infty\text{) je konvexná. V bode 1/2 má} \\ \text{ostré lokálne minimum. Inflexné body nemá. Asymptota je x = 0.} \end{array}\right\}$$

- $f(x) = xe^{-x^2/2}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{D(f) = (-}\infty\text{ , }\infty\text{) , je nepárna, spojitá. Na (-1,1) je rastúca, na (-}\infty\text{ ,-1), (1,}\infty\text{)} \\ \text{je klesajúca. Na (-}\sqrt{3}\text{,0), (}\sqrt{3}\text{,}\infty\text{) je konvexná. V bode -1 má ostré lokálne} \\ \text{minimum. V bode 1 má ostré lokálne maximum. V bodoch 0, }\sqrt{3}\text{,-}\sqrt{3}\text{ má} \\ \text{inflexné body. Asymptota je y = 0.} \end{array}\right\}$$

- $f(x) = x + e^{-x}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{D(f) = (-}\infty\text{, }\infty\text{), nie je párna ani nepárna, je spojitá, nulové body nemá.} \\ \text{Na (0, }\infty\text{) je rastúca, na (-}\infty\text{, 0) je klesajúca. Na (-}\infty\text{ , }\infty\text{)} \\ \text{je konvexná. V bode 0 má ostré lokálne minimum. Inflexné body} \\ \text{nemá. Asymptota je y = x.} \end{array}\right\}$$

- $f(x) = x \ln x$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{D(f) = (0, }\infty\text{), nie je párna ani nepárna, je spojitá, v bode 1 má nulový bod.} \\ \text{Na (1/e,}\infty\text{) je rastúca, na (0,1/e) je klesajúca. Na (0, }\infty\text{) je konvexná.} \\ \text{V bode 1/e má minimum. Inflexné body nemá. Asymptoty nemá.} \end{array}\right\}$$

- $f(x) = \ln(4 - x^2)$,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{D(f) = (-2,2), je párna, spojitá, v bodoch } \sqrt{3}, -\sqrt{3} \text{ má} \\ \text{nulové body. Na (-2,0) je rastúca, na (0,2) je klesajúca. Na} \\ \text{(-2,2) je konkávna. V bode 0 má ostré lokálne maximum.} \\ \text{Inflexné body nemá. Asymptoty sú x = 2, x = -2.}\end{array}\right\}$$

- $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\ x$,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{D(f) = } (-\infty, \infty)\text{, je nepárna, je spojitá, v bodoch - 2,331...,2.331...} \\ \text{má nulové body. Na } (-\infty,-1), (1,\infty) \text{ je rastúca, na (-1,1) je klesajúca.} \\ \text{Na } (0,\infty) \text{ je konvexná, na } (-\infty,0) \text{ je konkávna. V bode 1 má ostré} \\ \text{lokálne minimum, v bode -1 má ostré lokálne maximum. V bode 0 má} \\ \text{inflexný bod. Asymptoty sú } y = x - \pi,\ y = x + \pi.\end{array}\right\}$$

- $f(x) = x\,\mathrm{arctg}\ x$.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{D(f) = } (-\infty, \infty)\text{, je párna, spojitá, v bode 0 má nulový bod.} \\ \text{Na } (0,\infty) \text{ je rastúca, na } (-\infty,0) \text{ je klesajúca. Na } (-\infty,\infty) \text{ je konvexná.} \\ \text{V bode 0 má ostré lokálne minimum. Inflexné body nemá. Asymptoty sú} \\ y = \pi x/2 - 1,\ y = -\pi x/2 - 1.\end{array}\right\}$$

16. Nájdite funkciu danú parametricky a znázornite jej graf:
   - $x = t + 1, y = 1 - 2t - t^2$, ak $t \in (1,4)$; $\{y = 2 - x^2, (2,5)\}$
   - $x = 4\cos t, y = 3\sin t$, ak $t \in \langle 0, \pi \rangle$; $\{y = 3\sqrt{16 - x^2}/4, \langle -4,4 \rangle\}$
   - $x = 8\cos^2 t, y = 9\sin^2 t$, ak $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. $\{y = -9x/8 + 9, \langle 0,8 \rangle\}$

17. Nájdite množinu všetkých hodnôt parametra *t* tak, aby dané parametrické rovnice určovali spojitú funkciu *f*. Elimináciou parametra *t* z týchto rovníc nájdite funkciu *f*, ktorá je určená rovnicami: $x = a\cos^3 t, y = a\sin 3t, a > 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} t \in \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle,\ y = \sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^3},\ x \in \langle -a, a \rangle,\ t \in \langle \pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi \rangle, \\ y = -\sqrt{\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^3},\ x \in \langle -a, a \rangle, \text{ kde } k \text{ je celé číslo.}\end{array}\right\}$$

18. Zistite, či dané parametrické rovnice určujú krivku a znázornite ju:
   $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

   {oblúk cykloidy}

19. Nájdite parametrické rovnice krivky a znázornite ju, ak v polárnom súradnicovom systéme má rovnicu:
   - $\rho = 2\sin\varphi$ (kružnica), $\{x = \sin 2\varphi, y = 2\sin^2\varphi; \varphi \in (0,\pi)\}$
   - $\rho = 2\cos 3\varphi$ (trojlístok) $\{x = 2\cos\varphi\cos 3\varphi, y = 2\sin\varphi\sin 3\varphi; \varphi \in (0,\pi)\}$
   - $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$ (kardioida) $\{x = 2(1+\cos\varphi)\cos\varphi, y = 2(1+\cos\varphi)\sin\varphi; \varphi \in (0,2\pi)\}$

20. Nájdite deriváciu funkcie danej parametricky v bode t_0, ak:
   - $x = \dfrac{2}{3} - \sqrt{2}t^3, y = \dfrac{1}{2}t^2$, $t_0 = 4$; $\{\sqrt{2}\}$
   - $x = \dfrac{2\sin t}{1 + 3\cos t}, y = \dfrac{4\cos t}{1 + \cos t}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. $\{-2/3\}$

21. Vypočítajte deriváciu funkcie danej parametricky:

- $x = \dfrac{1-t}{1+t}, y = \dfrac{2t}{1+t}$; $\{-1, t \neq 1\}$
- $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$; $t \in (0, \pi)$. $\{-\operatorname{tg} t, t \neq \pi/2\}$