Primitívna funkcia

Pri zavedení pojmu derivácie sme uviedli príklady na výpočet okamžitej rýchlosti pohybujúceho sa hmotného bodu po priamke, ak pohyb hmotného bodu je popísaný funkciou $s = f(t)$. V tejto časti sa budeme zaoberať opačnou úlohou, t.j. hľadaním zákona dráhy pohybu bodu po priamke, ak je daná okamžitá rýchlosť jeho pohybu ako funkcia času.

Príklad *Nech okamžitá rýchlosť* $v(t)$ *pohybujúceho sa bodu po priamke je daná rovnicou* $v(t) = 5t - 3$. *Ak poloha bodu v okamžiku t je* $s(t)$, *tak* $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$. *Hľadáme teda funkciu* $s(t)$, *pre ktorú platí* $\dfrac{ds}{dt} = 5t - 3$. *Túto podmienku spĺňa nekonečne mnoho funkcií* $s(t) = \dfrac{5}{2}t^2 - 3t + C$, *kde C je ľubovoľná konštanta.*

Definícia 6.1 Funkcia $F : J \to R$, kde $J \subset R$ je interval, sa nazýva ***primitívna funkcia k funkcii*** f ***na intervale*** J, ak pre všetky $x \in J$ je $F'(x) = f(x)$ (v krajných bodoch intervalu uvažujeme jednostranné derivácie).

Z definície primitívnej funkcie F vyplýva, že je spojitou funkciou na *J*, pretože má na *J* deriváciu.

Na príklade sme ukázali, že k danej funkcii môže existovať nekonečne mnoho primitívnych funkcií.

Veta 6.1
a) Nech funkcia F ***je primitívna*** funkcia k funkcii *f* na intervale *J* a $C \in R$, potom aj funkcia $G = F + C$ ***je primitívnou*** funkciou k funkcii *f* na intervale *J*.
b) Nech funkcie F, G ***sú primitívne*** funkcie k funkcii *f* na intervale *J*, potom funkcia $F - G$ ***je konštantná*** na *J*.

Teda ak k danej funkcii *f* existuje primitívna funkcia *F* na intervale *J*, existuje ich nekonečne mnoho. Množinu $\{F + C; C \in R\}$ všetkých primitívnych funkcií k funkcii *f*, označujeme symbolom $\int f(x)dx$ a čítame "integrál *f(x) dx*". Symbol $\int f(x)dx$ nazývame ***neurčitý integrál***. Píšeme
$\int f(x)dx = F(x) + C$

Platí $\int f'(x)dx = f(x) + C$, $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

Proces hľadania primitívnej funkcie k danej funkcii nazývame ***integrovaním*** alebo ***integráciou funkcie***, argument *x* nazývame ***integračnou premennou***, konštantu C nazývame ***integračnou konštantou***.

Výpočet primitívnej funkcie

Veta 6.2 Nech funkcia $f : J \to R$ je spojitá na intervale J, potom k nej existuje primitívna funkcia $F : J \to R$.

Veta 6.3 *(Veta o lineárnosti)* Nech k funkciám f a g existujú primitívne funkcie na intervale J a aspoň jedna z reálnych konštánt a, b je rôzna od nuly, potom existuje primitívna funkcia k funkcii $af + bg$ na intervale J a platí $\int \left(af\left(x\right) + bg\left(x\right)\right)dx = a\int f\left(x\right)dx + b\int g\left(x\right)dx$.

Platnosť vety sa dá rozšíriť na ľubovoľný konečný počet sčítancov.