Diferenciál funkcie

V praktických úlohách často potrebujeme približne nahradiť (aproximovať) danú funkciu f pomocou inej, obyčajne jednoduchšej funkcie g. Funkciu g hľadáme tak, aby hodnota výrazu $|f(x)-g(x)|$ bola "malá". Jednou z najjednoduchších funkcií pre (lokálnu) aproximáciu v okolí bodu x_0 je lineárna funkcia $g(x)=f(x_0)+a(x-x_0)$. Konštantu a zvolíme tak, aby chyba aproximácie $|f(x)-g(x)|$ vzhľadom na vzdialenosť $\rho(x,x_0)=|x-x_0|$ bodu x od bodu x_0 spĺňala podmienku

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-g(x)|}{x-x_0}=0\,.$$

Teda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)-a(x-x_0)|}{x-x_0}=0\,.$$

Ak položíme $x-x_0=h$, môžeme túto podmienku zapísať v tvare

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-ah|}{h}=0\,.$$

Definícia 4.5 Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu x_0. Hovoríme, že funkcia f je v bode x_0 diferencovateľná, ak prírastok funkcie $\Delta f = f(x)-f(x_0)$ môžeme vyjadriť v tvare

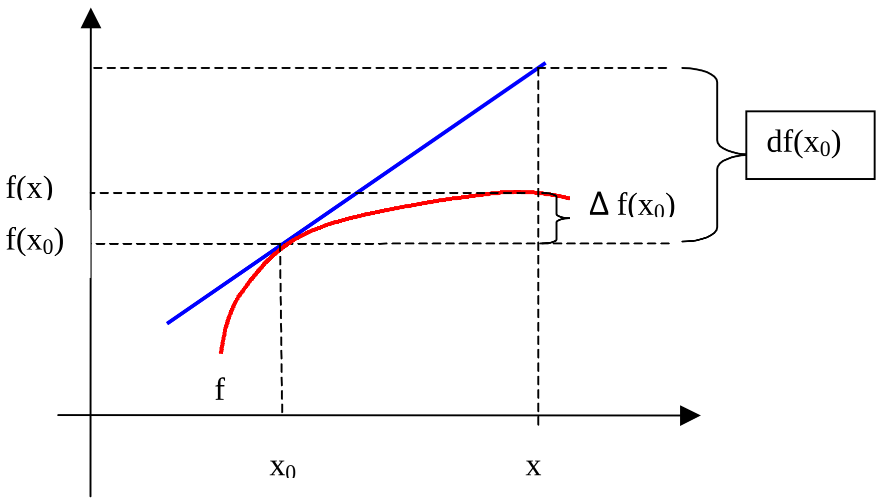
$$f(x)-f(x_0)=K(x-x_0)+\omega(x)|x-x_0|\,,$$

kde $K\in\mathbf{R}$ a ω je spojitá funkcia, pre ktorú platí: $\lim\limits_{h\to 0}\omega(x)=\omega(x_0)=0$.

Výraz $K(x-x_0)$ ***nazývame diferenciálom funkcie*** f v bode x_0 a označujeme ho $df(x_0)$, resp. $df(x)$ v prípade, ak x je "premenný " bod.

Veta 4.6 Funkcia f je v bode x_0 ***diferencovateľná*** práve vtedy ***ak má*** v bode x_0 ***deriváciu***. Potom platí $df(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Niekedy namiesto prírastku $x-x_0$ píšeme h alebo Δx. Funkciu f teda môžeme lokálne aproximovať v okolí bodu x_0 pomocou (prvého) diferenciálu funkcie f v bode x_0.



Teda

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + df(x_0).$$