Riešené príklady 4

Príklad *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=5\sqrt{x^3}-6\operatorname{arctg}x+2\sin x-158.$

Riešenie. Najskôr sa pozrieme na základné vzorce. Vidíme, že medzi nimi nemáme "priamo uvedený" vzorec pre odmocniny, preto danú funkciu si upravíme takto $f(x)=5x^{\frac{3}{2}}-6\operatorname{arctg}x+2\sin x-158.$ Teraz už môžeme použiť základné vzorce. Dostávame $f'(x)=5\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}-6\frac{1}{1+x^2}+2\cos x-0.$

Príklad *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=\ln x\sin x+\dfrac{2^x}{\cos x}.$

Riešenie. Pozrieme si pravidlá pre derivovanie súčinu a podielu. Použitím uvedených pravidiel dostávame

$$f'(x)=(\ln x)'\sin x+\ln x(\sin x)'+\frac{(2^x)'\cos x-2^x(\cos x)'}{(\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1}{x}\sin x+\ln x\ \cos x+\frac{2^x\ln 2\cos x-2^x(-\sin x)}{\cos^2 x}.$$

Príklad *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=\sin 2x+\sin^2 x+\sin x^2$.

Riešenie. Použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie $F(x)=f[g(x)],\quad F'(x)=f'[g(x)]g'(x).$ Daná funkcia je súčtom troch funkcií a jej derivácia bude rovná súčtu derivácií jednotlivých funkcií. Deriváciu $F_1(x)=\sin 2x$ vypočítame takto. Položíme $u=2x$, potom

$$\frac{dF_1}{dx}=\frac{dF_1}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d(\sin u)}{du}\frac{d(2x)}{dx}=(\cos u)2=2\cos 2x$$. Podobne dostávame

$$\frac{dF_2}{dx}=\frac{dF_2}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d[(u)^2]}{du}\frac{d(\sin x)}{dx}=2u^1\cos x=2\sin x\cos x.$$

$$\frac{dF_3}{dx}=\frac{dF_3}{du}\frac{du}{dx}=\frac{d[(\sin u)]}{du}\frac{d(x^2)}{dx}=(\cos u)2x=2x\cos x^2.$$ Výsledok je súčtom derivácií jednotlivých funkcií. Teda

$f'(x)=2\cos 2x+2\sin x\cos x+2x\cos x^2$.

Príklad *Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x)=e^{-x}\cos 2x$ *v bode* $P=(0,?)$.

Riešenie. Druhá súradnica bodu je hodnota funkcie $f(0)=e^{-0}\cos(2.0)=1$. Teda P=(0,1). Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie f v bode $P=(x_0,f(x_0))$ je $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ a rovnica normály je $y-f(x_0)=\dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

$f'(x)=-e^{-x}\cos 2x-2e^{-x}\sin 2x$ a $f'(0)=-e^{-0}\cos(2.0)-2e^{-0}\sin(2.0)=-1$. Teda rovnica dotyčnice je $y-1=-1.(x-0)$ a rovnica normály je $y-1=\dfrac{-1}{-1}(x-0)$.

Príklad *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to 0}(\cot g\ x - \frac{1}{x})$.

Riešenie. Táto limita je typu $\infty - \infty$ preto danú funkciu upravíme do vhodnejšieho tvaru $\lim\limits_{x\to 0}(\cot g\ x - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to 0}(\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x})$ upravená limita je typu $\frac{0}{0}$ a pretože existujú nasledujúce limity platí (L´Hospitalovo pravidlo):

$$\lim_{x\to 0}(\cot g\ x - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(-x\sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{-\sin 0 - 0\cos 0}{2\cos 0 - 0.\sin 0} = 0.$$

Príklad *Vypočítajme* $\sqrt{(4{,}2)^2 + 9}$.

Riešenie. Vidíme, že $\sqrt{(4{,}2)^2 + 9}$ je hodnotou funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ v bode $x = 4{,}2$. Bez problémov vieme vypočítať hodnotu danej funkcie v bode $x = 4$. Použitím diferenciálu danej funkcie v tomto bode dostávame

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)h = \sqrt{x_0^{\ 2} + 9} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\ 2} + 9}}.h =$$

$$= \sqrt{4^2 + 9} + \frac{4}{\sqrt{4^2 + 9}}.0{,}2 = 5 + \frac{4}{5}.0{,}2.$$

Teda $\sqrt{(4{,}2)^2 + 9} = 5 + \frac{0{,}8}{5}$.