Taylorova veta

Ukázali sme, že niekedy funkciu f môžeme lokálne aproximovať pomocou lineárnej funkcie

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Túto úlohu zovšeobecníme.

Predpokladajme, že funkcia f má v bode $x_0 \in \mathbf{R}$ deriváciu $f^{(n)}(x_0)$. Hľadajme taký polynóm T_n stupňa najviac n

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

aby T_n čo najlepšie aproximoval funkciu f v okolí bodu x_0. Budeme teda požadovať splnenie podmienok

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0,1,\ldots,n, \text{ kde } f^{(0)}(x_0) = f(x_0).$$

Postupným derivovaním polynómu T_n a dosadením $x = x_0$ dostaneme

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k = 0,1,\ldots,n \quad (0! = 1).$$

Definícia 4.6 Polynóm

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

sa nazýva ***Taylorov polynóm funkcie*** f v bode x_0.

Vzorec

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

sa nazýva Taylorov vzorec a funkcia $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, $x \in D(f)$ je zvyšok.

Poznámka Pre $x_0 = 0$ sa Taylorov vzorec nazýva ***Maclaurinov vzorec***.

Poznámka Ak položíme $h = x - x_0$ a $f^{(k)}(x_0)h^k = d^k f(x_0, h)$, tak

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, h) + R_n(x_0, h).$$

Veta 4.12 (Taylorova veta) Nech funkcia f je v istom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 $(n+1)$- krát diferencovateľná. Potom pre bod $x \in O(x_0)$ platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Zvyšok R_n možno vyjadriť v Lagrangeovom tvare:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodným vnútorným bodom intervalu J s koncovými bodmi x_0 a x, t.j.

$$\xi = x_0 + \vartheta(x-x_0), \quad \vartheta \in (0,1).$$

Použitím Taylorovej vety pre $x \in \mathbf{R}$ a $\vartheta \in (0,1)$ dostaneme

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\vartheta x}.$$

Teda

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \cos(\vartheta x)\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Teda

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + (-1)^m \sin(\vartheta x)\frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Teda

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}.$$