Postupnosti

Definícia 3.9 Funkciu $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ nazývame ***postupnosťou reálnych čísel*** a prvok $a_n = f(n)$ nazývame n - tý člen postupnosti.

Pre postupnosť používame tiež označenie $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 3.10 ***Postupnosť*** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva ***zhora, resp. zdola ohraničená***, ak je množina $\{a_n ; n \in \mathbf{N}\}$ zhora, resp. zdola ohraničená. Postupnosť, ktorá je ohraničená zdola aj zhora sa nazýva ohraničená.

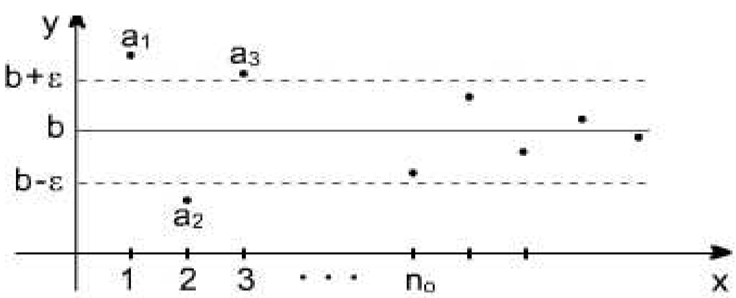
Definícia 3.11 ***Postupnosť*** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva ***neklesajúca***, resp. ***nerastúca***, ak $a_n \le a_{n+1}$, resp. $a_n \ge a_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbf{N}$. ***Postupnosť*** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva ***rastúca,*** resp. ***klesajúca***, ak $a_n < a_{n+1}$, resp. $a_n > a_{n+1}$ pre každé $n \in \mathbf{N}$.

Postupnosti: rastúce, klesajúce, neklesajúce, nerastúce nazývame monotónne. Rastúce a klesajúce postupnosti sa nazývajú rýdzo monotónne.

Množina $\mathbf{N}$ má jediný hromadný bod ∞, preto má zmysel hovoriť o limite postupnosti iba v tomto bode.

Definícia 3.12 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ práve vtedy, keď ku každému $O_\varepsilon(b)$ existuje také $n_0 \in \mathbf{N}$, že pre všetky $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$ platí $a_n \in O_\varepsilon(b)$. Zapíšeme to takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Leftrightarrow (\forall O_\varepsilon(b))(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, n > n_0): a_n \in O_\varepsilon(b).$$



Definícia 3.13 Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Keď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbf{R}$, hovoríme, že ***postupnosť*** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ***konvergentná***. V opačnom prípade (t.j. keď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \{-\infty, \infty\}$ alebo keď $\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ neexistuje) hovoríme, že ***postupnosť*** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ***divergentná***.

Veta 3.17 Ak je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, tak je ohraničená.

Veta 3.18 Neklesajúca postupnosť, ktorá je zhora ohraničená, je konvergentná. Nerastúca postupnosť, ktorá je zdola ohraničená, je konvergentná.

Veta 3.19 Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné postupnosti. Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbf{R}$. Potom platí:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = a.b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},\quad \lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n)^k = a^k\ (k \in \mathbf{Z}),$$

ak majú výrazy $a+b, a-b, a.b, \dfrac{a}{b}, a^k$ v $\mathbf{R}^*$ zmysel.

Dôležitou postupnosťou je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Dá sa ukázať, že táto postupnosť je rastúca, zhora ohraničená a vzhľadom na poslednú vetu má limitu. Označíme ju e. Teda

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7182818\ldots.$$

Nech $k \in \mathbf{R}$, potom

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1.$$

Pre limitu funkcie $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ platí $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Príklad *Vypočítajme* $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{5n-158}$.

Riešenie. Najskôr vyriešime jednoduchšiu úlohu. Vypočítame

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n,$$

kde $k \in \mathbf{R}$ je kladné. Urobíme substitúciu

$$1+\frac{k}{n} = 1+\frac{1}{m}.$$

Teda $n = km$. Ak $n \to \infty$, tak aj $m \to \infty$. Dostávame

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{km} = \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^k = e^k.$$

Teraz už ľahko vyriešime danú úlohu. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{5n-158}=\frac{\left[\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^{m}\right]^{5n-158}}{\left[\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{2}{m}\right)^{m}\right]^{5n-158}}=\frac{\left[\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{3\cdot 5n-158}}{\left[\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{2\cdot 5n-158}}=\frac{e^{15}}{e^{10}}=e^{5}.$$

Z príslušných viet o limitách funkcií dostávame:

Definícia 3.14 Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel a $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ je ľubovolná rastúca postupnosť prirodzených čísel. Postupnosť $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ sa nazýva ***vybraná postupnosť*** z postupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Veta 3.20 Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť a $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ je z nej vybraná postupnosť. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}^*$, tak aj $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a \in \mathbf{R}^*$.

Veta 3.21 Z každej ohraničenej postupnosti sa dá vybrať konvergentná postupnosť.

Definícia 3.15 Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazývame ***cauchyovskou postupnosťou***, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také $n_0 \in \mathbf{N}$, že pre všetky dvojice $n, m \in \mathbf{N}$, $n > n_0, m > n_0$ platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$ t.j. ak

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n, m \in \mathbf{N}, n > n_0, m > n_0): |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Veta 3.22 Postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná práve vtedy, keď je cauchyovská.

Pri dôkazoch niektorých viet bude výhodnejšie vyjadriť limitu, resp. spojitosť funkcie v "jazyku" postupnosti (Heineho definície):

- Funkcia $f : A \to \mathbf{R}$ má v bode $a \in \mathbf{R}^*$ limitu $b \in \mathbf{R}^*$, práve vtedy, keď a je hromadným bodom množiny A a pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in A - \{a\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
- Funkcia $f : A \to \mathbf{R}$ je spojitá v bode $a \in A$, práve vtedy, keď pre každú postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ platí, $x_n \in A$ (n=1,2,...) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.