10.10 Cvičenia 10

1. Zistite, aké množiny v rovine $\boldsymbol{C}$ sú dané nasledujúcimi vzťahmi:
   a) $z = e^{it} + e^{-it}$; [elipsa]
   b) $|z-2| < |z|$; [polrovina $\mathrm{Re}\, z > 1$]
   c) $\mathrm{Im}\,(1/z) = 2$. [kružnica]

2. Nájdite všetky hodnoty nasledujúcich komplexných čísel:
   a) $(3-4\,i)^{1+i}$;
   $[5e^{\mathrm{Arctg}\,\frac{4}{3}+2k\pi}[\cos(\ln 5 - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}) + i\sin(\ln 5 - \mathrm{arctg}\frac{4}{3})]\ ]$
   b) $\mathrm{Ln}\,(1+i)$; $[\frac{1}{2}\ln 2 + i\,\pi/4 + 2k\pi\, i\ ]$
   c) $\cos(2+2i)$; $[\cos 2\cosh 2 - i\sin 2\sinh 2\ ]$
   d) $\mathrm{Arctg}\,(1+2\,i)$; $[k\pi + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, 2 + \frac{i}{4}\ln 5\ ]$
   e) $\sinh(2-i)$; $[\cosh 2\cos 1 - i\cosh 2\sin 1\ ]$
   f) $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{2\,i}$; $[e^{-(2k+1/2)\pi}]$
   g) $2^{-1}(\sqrt{3}+i)^{1+i}$. $[\ e^{-s}\cos s + i\,e^{-s}\sin s,\ s = \pi/6]$

3. Nájdite obrazy daných kriviek pri zobrazení $w = 1/z$:
   a) $x = 1$; $[(u-1/2)^2 + v^2 = 1/4]$
   b) $y = x$; $[u + v = 0]$
   c) $(x-1)^2 + y^2 = 1$. $[1/2]$

4. Nájdite analytickú funkciu $f = u + i\,v$ na množine $\boldsymbol{C}$, ak:
   a)$u = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3$ a $f(i) = i$;
   $[f(z) = (2+3\,i)z^2 + (1+i)z + 3 + 3\,i]$
   b) $u = x^2 - y^2 + xy,\ f(0) = 0$; $[f(z) = z^2(2-i)/2]$
   c) $v = 2xy + 3x$; $[f(z) = z^2 + 3\,iz + c]$
   d) $u = x/(x^2+y^2) - 2y$; $[f(z) = 1/z + 2\,iz + c\,i]$
   e) $v = y/(x^2+y^2),\ f(2) = 0$. $[f(z) = 1/2 - 1/z]$

5. Vypočítajte $\int\limits_K (1 + i - 2\bar{z})dz$, po krivke spájajúcej body $z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i$:
   a) po priamke; $[2(i-1)]$
   b) po parabole $y = x^2$. $[-2 + 4i/3]$

6. Vypočítajte $\int\limits_K |z|\bar{z}\,dz$, kde K je uzavretá kladne orientovaná krivka, zložená z polkružnice $|z| = 1$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ a úsečky $-1 \le \mathrm{Re}\, z \le 1$, $\mathrm{Im}\, z = 0$. $[\pi\, i]$

7. Vypočítajte $\int\limits_K z\sin z\ dz$, kde K je:
   a) úsečka so začiatočným bodom 0 a koncovým i,
   b) parabola $z = t^2 - t + i\,t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením.
   $[i(\sinh 1 - \cosh 1)]$

8. Vypočítajte $\oint\limits_K \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$, ak pre K platí:
   a) $|z| = 1$; $[0]$

b) $|z+1-i|=2$; $[(2-3\,i)/4]$
c) $|z+1+i|=2$. $[(2+3\,i)/4]$

9. Vypočítajte $\displaystyle\int_K \frac{1}{z^2+9}dz$, kde K je jednoduchá uzavretá po častiach hladká krivka, pričom:
a) $3\,i$ leží vo vnútri K, $-3\,i$ zvonku K; $[\pi/3]$
b) $-3\,i$ leží vo vnútri K, $3\,i$ zvonku K; $[-\pi/3]$
c) $-3\,i$, $3\,i$ ležia vo vnútri K. $[0]$

10. Vypočítajte $\displaystyle\oint_K \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$, ak krivka K je kladne orientovaná elipsa $z=\cos t+i\,(1+\sqrt{2}\sin t)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$. $[\pi\,i/2]$

11. Vypočítajte $\displaystyle\oint_K \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, kde K je kladne orientovaný obvod štvorca určeného vrcholmi $1,\ 1+2\,i,\ -1+2\,i,\ -1$. $[-\pi i\cosh 1]$

12. Vypočítajte $\displaystyle\oint_{|z|=6} \frac{\cosh z dz}{(z+1)^3(z-1)}$. $[-\pi\,i/(2e)]$

13. Nájdite singulárne body danej funkcie f a zistite druh týchto singulárnych bodov :
a) $\dfrac{z}{(z^2+i)^3}$;
$[z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ sú poly 3. rádu; ∞ je odstr. sing. bod$]$
b) $\dfrac{\cos z}{z^2}$; $[z=0$ je pól 2. rádu; $z=\infty$ je podst. sing. bod$]$
c) $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$. $[z=1$ je pól 2. rádu; $z=\infty$ je pól 3.rádu$]$

14. Nájdite rezíduum funkcie f v jej izolovaných singulárnych bodoch:
a) $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}$; $[\text{res } f(0)=1, \text{res } f(\pm1)=-1/2, \text{ res } f(\infty)=0]$
b) $f(z)=\dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$; $[\text{res } f(i)=-i/4, \text{ res } f(-i)=i/4]$
c) $f(z)=\dfrac{z^3+z^2+2}{z(1-z^2)^2}$;
$[\text{res } f(0)=2, \text{ res } f(1)=-3/4, \text{ res } f(-1)=-5/4]$
d) $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{1+z^2}$. $[\text{res } f(-i)=i/2, \text{ res } f(i)=-i/2, \text{ res } f(\infty)=0]$