## 11.3 Spätná Laplaceova transformácia

Doteraz sme sa zaoberali problémom určenia obrazu $F(p)$ v (LT) k predmetu $f(t)$. Spätná (LT) priradí komplexnej funkcii $F$ komplexnej premennej predmet $f$, ktorého Laplaceovým obrazom je funkcia $F$. Je potrebné riešiť problém existencie spätnej (LT), t. j. pre ktoré funkcie $F$ existuje predmet $f$.

**Veta 11.15** *(Lerchova veta) Nech $f$ a $g$ sú predmety s rovnakým obrazom v (LT), t. j. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Potom $f = g$ s výnimkou izolovaných bodov, v ktorých funkcia $f$ alebo funkcia $g$ nie je spojitá.*

Je zrejmé, že obraz $F$ musí spĺňať podmienky existencie obrazu $F$ k predmetu $f$:

- existuje také reálne číslo $\alpha_0$, že funkcia $F$ je analytická v polrovine $\operatorname{Re} p > \alpha_0$;
- v ľubovoľnej polrovine $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$ platí $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$.

Uvedené podmienky sú nutné podmienky pre existenciu obrazu, nie však postačujúce.

**Veta 11.16** *Nech $f$ je predmet s indexom rastu $\alpha_0$ a nech $f(t) \div F(p)$. Ak funkcia $f$ je spojitá v bode $t$ a má v ňom konečné jednostranné derivácie, tak platí Riemannov-Mellinov alebo Bromwichov vzorec spätnej Laplaceovej transformácie*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

*kde $a$ je ľubovoľné reálne číslo, pre ktoré platí $a > \alpha_0$.*

Nasledujúca veta udáva postačujúce podmienky existencie predmetu $f$ pre niektoré funkcie $F$.

**Veta 11.17** *Nutnou a postačujúcou podmienkou toho, aby racionálna funkcia $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ ($A, B$ sú polynómy nad množinou komplexných čísel) bola Laplaceovým obrazom nejakého predmetu je, že stupeň polynómu $A$ je nižší ako stupeň polynómu $B$.*

**Príklad 11.2** *Nájdime predmet $f(t)$ k funkcii*

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}.$$

*Riešenie.* Funkcia $F$ má póly $p_{12} = 0$, $p_3 = 1$, $p_4 = -2$. Potom

$$f(t) = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, 0] + \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, 1] + \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, -2] =$$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp}\left[(p-0)^2 \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} e^{pt}\right] +$$

$$\frac{1}{(1-1)!} \lim_{p\to 1}\left[(p-1)\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} e^{pt}\right] +$$

$$\frac{1}{(1-1)!} \lim_{p\to -2}\left[(p+2)\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)} e^{pt}\right] =$$

$$= -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t}.$$

Použitím lineárnosti (LT), už známych vzťahov $e^{at} \div \frac{1}{p-a}$, $t \div \frac{1}{p^2}$ a rozkladom funkcie $F$ na parciálne zlomky dostaneme

$$F(p) = -\frac{3}{4}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{12}\frac{1}{p+2} \div$$

$$\div -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t}.$$