4.4 Extrémy funkcie viac premenných

4.4.1 Lokálne extrémy

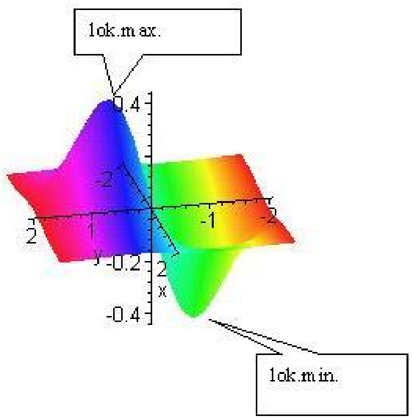
Definícia 4.14 *Nech funkcia $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \to \boldsymbol{R}$. Hovoríme, že funkcia f má v bode $a \in A$* **lokálne minimum**, *(***lokálne maximum***) ak existuje také okolie $O(a)$ bodu a, že pre každé $x \in O(a) \cap A$ platí*

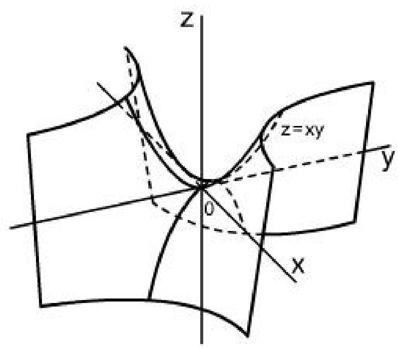
$$f(x) \geq f(a) \qquad (f(x) \leq f(a)). \tag{1}$$

Ak pre každé $x \in \mathring{O}(a) \cap A$ platí $f(x) > f(a)$ $(f(x) < f(a))$, hovoríme, že funkcia f má v bode a **ostré lokálne minimum** *(***ostré lokálne maximum***).*
Ak nerovnosť (1) platí pre všetky $x \in A$, tak hovoríme, že funkcia f má v bode a **absolútne minimum (maximum)**.

Veta 4.21 *Nech funkcia $f \in C^1(O(a))$ a má v bode a lokálny extrém. Potom $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.*

Definícia 4.15 *Bod a nazývame stacionárnym bodom funkcie f, ak $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$.*





Poznámka 4.12 *Funkcia f môže mať lokálne extrémy iba v takých bodoch, v ktorých prvé parciálne derivácie funkcie f sú rovné nule alebo v bodoch, v ktorých nemá deriváciu z $\boldsymbol{R}$.*

Existenciu a charakter lokálnych extrémov v stacionárnom bode a určíme z vlastnosti diferenciálu druhého rádu

$$\mathrm{d}^2 f(a,x) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right]^2 f(a) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j; \quad h_i = x_i - a_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nech $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$, potom druhý diferenciál je kvadratickou formou premenných h_i:

$$\mathrm{d}^2 f(a,x) = Q(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j.$$

Tejto kvadratickej forme odpovedá symetrická matica

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definícia 4.16 *Hovoríme, že kvadratická forma $Q(h_1,\dots,h_n)$ je* **kladne (záporne) definitná**, *ak $Q(h_1,\dots,h_n) > 0$ ($Q(h_1,\dots,h_n) < 0$) pre všetky $(h_1,\dots,h_n) \neq (0,\dots,0)$. Kvadratická forma sa nazýva* **indefinitná**, *ak nadobúda kladné aj záporné hodnoty.*

Veta 4.22 *(Sylvestrovo kritérium) Kvadratická forma $Q(h_1,\dots,h_n)$ je kladne definitná práve vtedy, ak všetky hlavné determinanty matice kvadratickej formy*

$$\triangle_k = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1k} \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots, & a_{2k} \\ \\ a_{1k}, & a_{2k}, & \dots, & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$k = 1,\dots,n$ sú kladné. Kvadratická forma je záporne definitná práve vtedy, ak $(-1)^k \triangle_k > 0$, $k = 1,\dots,n$.

Veta 4.23 *(Postačujúca podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech funkcia $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \to \boldsymbol{R}$ má v bode $a \in A$ spojité parciálne derivácie druhého rádu a nech a je stacionárnym bodom funkcie f. Potom :*

1. *Ak kvadratická forma Q je kladne definitná, tak funkcia f má v bode a lokálne minimum.*
2. *Ak kvadratická forma Q je záporne definitná, tak funkcia f má v bode a lokálne maximum.*
3. *Ak kvadratická forma Q je v bode a indefinitná, tak funkcia f nemá v bode a lokálny extrém.*

Príklad 4.12 *Nájdime lokálne extrémy funkcie*

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Riešenie. Vypočítame parciálne derivácie f'_x a f'_y a položíme ich rovné nule. Dostaneme

$$f'_x \equiv 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \quad f'_y \equiv 6xy - 12 = 0.$$

Riešením danej sústavy dostaneme stacionárne body $P_1 = (1;2)$, $P_2 = (2;1)$, $P_3 = (-1;-2)$, $P_4 = (-2;-1)$. V týchto bodoch môže mať funkcia f lokálne extrémy. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu. Platí

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 6y, \quad f''_{yy} = 6x.$$

Pri rozhodovaní o existencii a type lokálneho extrému použijeme tvrdenie poslednej vety o postačujúcich podmienkach existencie lokálneho extrému. Vypočítame $\triangle_1(P_i) = f''_{xx}(P_i)$, $\triangle_2(P_i) = f''_{xx}(P_i)\dot{f}''_{yy}(P_i) - f''_{xy}(P_i)$ pre $i = 1,2,3,4$. Dostaneme

- $\triangle_2(P_1) = 36 - 144 < 0$, t. j. v bode P_1 neexistuje extrém;
- $\triangle_2(P_2) = 144 - 36 > 0$, t. j. v bode P_2 existuje extrém a pretože $\triangle_1(P_2) = 12 > 0$, v bode P_2 funkcia f má lokálne minimum $f_{\min} = f(P_1) = -28$;
- $\triangle_2(P_3) = 36 - 144 < 0$, t. j. v bode P_3 neexistuje extrém;
- $\triangle_2(P_4) = 144 - 36 > 0$, t. j. v bode P_4 existuje extrém a pretože $\triangle_1(P_4) = -12 < 0$, v bode P_4 funkcia f má lokálne maximum $f_{\max} = f(P_4) = 28$.

4.4.2 Implicitné funkcie

Budeme sa zaoberať množinami bodov z $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, ktoré vyhovujú rovnici $F(x, y) = 0$, kde F je daná funkcia dvoch premenných. Bude nás zaujímať aké vlastnosti funkcie F zaručujú, že rovnica $F(x, y) = 0$ definuje jednoznačne funkciu jednej reálnej premennej $f : y = f(x)$ pre x z nejakej podmnožiny množiny $\boldsymbol{R}$.

Definícia 4.17 *Nech $a = (a_1, a_2)$, $O(a) \subset A \subset \boldsymbol{R}^2$ a $F : A \to \boldsymbol{R}$ a nech platí $F(a_1, a_2) = 0$. Hovoríme, že v $O(a)$ je rovnicou $F(x, y) = 0$ implicitne daná funkcia $f : y = f(x)$, ak sú splnené tieto podmienky:*
1. f je definovaná v $O(a_1)$,
2. pre každé $x \in O(a_1)$ je $F(x, f(x)) = 0$,
3. $f(a_1) = a_2$,
4. $f : O(a_1) \to O(a_2)$.

Veta 4.24 *Nech $A \subset \boldsymbol{R}^2$ je otvorená množina a $F : A \to \boldsymbol{R}$, $F \in C^k(A)$, $k \geq 1$, bod $a = (a_1, a_2) \in A$, $F(a_1, a_2) = 0$ a $\dfrac{\partial F(a_1, a_2)}{\partial y} \neq 0$. Potom existujú okolia $O(a_1), O(a_2)$ také, že $O(a_1) \times O(a_2) \subset A$ a práve jedna funkcia $f : O(a_1) \to O(a_2)$ taká, že platí*
1. $F(x, f(x)) = 0$ pre každé $x \in O(a_1)$,
2. $f(a_1) = a_2$,
3. $f \in C^k(O(a_1))$,
4. $f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F(x, f(x))}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, f(x))}{\partial y}}$, $x \in O(a_1)$.

Veta 4.25 *Nech $A \subset \boldsymbol{R}^3$ je otvorená množina, $F \in C^k(A, \boldsymbol{R})$, $(k \geq 1)$ a nech pre nejaký bod $(a_1, a_2, a_3) \in A$ platí $F(a_1, a_2, a_3) = 0$, $\dfrac{\partial F(a_1, a_2, a_3)}{\partial x_3} \neq 0$. Potom existujú také okolia $O((a_1, a_2))$, $O(a_3)$ a práve jedna funkcia $f : O((a_1, a_2)) \to O(a_3)$ taká, že*
1. $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$ pre každé $(x_1, x_2) \in O((a_1, a_2))$,
2. $f(a_1, a_2) = a_3$,
3. $f \in C^k(O((a_1, a_2)))$,
4. $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i} = -\dfrac{\frac{\partial F(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}{\partial x_i}}{\frac{\partial F(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}{\partial x_3}}, \quad (x_1, x_2) \in O((a_1, a_2)), \quad i = 1, 2.$

Poznámka 4.13 *Nech funkcie f, F spĺňajú predpoklady vety 4.25. Potom rovnica dotykovej roviny ku ploche $z = f(x, y)$ v bode $T = (a_1, a_2) = (x_0, y_0)$ je*

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(a)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(a)}{\partial z}(z - z_0) = 0,$$

kde $a = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

4.4.3 Viazané extrémy

Definícia 4.18 *Nech $f : \boldsymbol{R}^2 \supset A \to \boldsymbol{R}$, $g : A \supset B \to \boldsymbol{R}$. Predpokladajme, že množina $M = \{(x, y) \in A | \quad g(x, y) = 0\}$ a nech funkcia $f_{|M}$ má v bode a lokálny extrém. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a viazaný lokálny extrém. Podmienku $g(x, y) = 0$ nazývame väzbou.*

Uvedieme postup pre výpočet viazaných extrémov, ak funkcie f, g sú dva razy diferencovateľné.

Lokálne extrémy tzv. Lagrangeovej funkcie

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y), \quad \lambda \in \boldsymbol{R}$$

sú viazanými extrémami funkcie f na množine M. Vzhľadom na vlastnosti funkcií f, g, funkcia F je dva razy diferencovateľná, a teda v bodoch, v ktorých môže mať funkcia F lokálny extrém, sú splnené podmienky:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y) &= f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0, \\ F'_y(x,y) &= f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0, \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Nech x_0, y_0, λ_0 je nejaké riešenie tejto sústavy. Potom (x_0, y_0) je stacionárnym bodom funkcie f vzhľadom na väzbu $g(x,y) = 0$ pre parameter $\lambda = \lambda_0$.

Príklad 4.13 *Nájdime extrémy funkcie $f(x,y) = x + y$ na kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$.*

Riešenie. Väzbou je kružnica $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Zostavíme funkciu $F(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ a hľadáme jej extrémy. Pre výpočet stacionárnych bodov dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} F'_x(x,y) &\equiv 1 + 2\lambda x = 0, \\ F'_y(x,y) &\equiv 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Vypočítame x z prvej rovnice y z druhej a dosadíme do tretej rovnice. Dostaneme

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0,$$

odkiaľ dostaneme $\lambda_1 = 1/\sqrt{2}$ a $\lambda_2 = -1/\sqrt{2}$. Potom pre λ_1 dostaneme funkciu

$$F_1(x,y) = x + y + \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2 - 1).$$

Jej stacionárny bod je bod $P_1 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Podobným spôsobom ako v poslednom príklade sa presvedčíme, že funkcia F_1 má v bode P_1 ostré lokálne minimum. Pre λ_2 dostaneme funkciu

$$F_2(x,y) = x + y - \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + y^2 - 1).$$

Jej stacionárny bod je bod $P_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Podobným spôsobom ako v prípade F_1 sa presvedčíme, že funkcia F_2 má v bode P_2 ostré lokálne maximum.

Teda funkcia $f(x,y) = x + y$ má na kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ lokálne minimum v bode P_1 a lokálne maximum v bode P_2.

Podobne postupujeme pri hľadaní viazaných extrémov funkcie viacerých premenných $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ s väzbami $g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, k$; $k < n$. Lagrangeova funkcia je v tomto prípade definovaná vzťahom

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n).$$

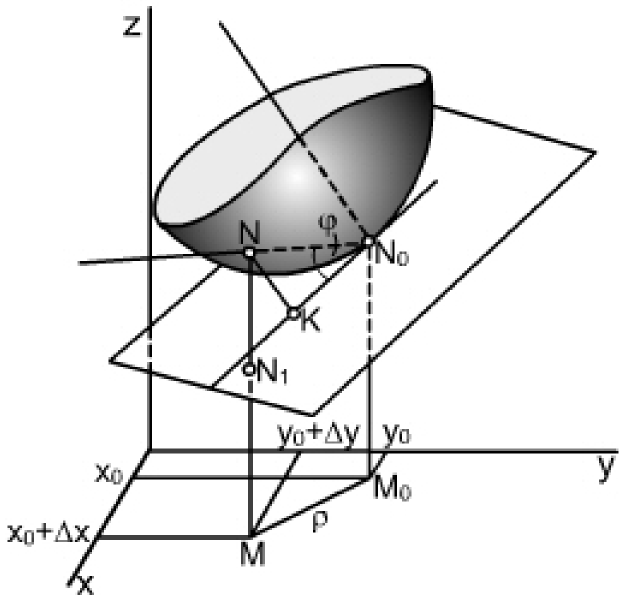
Absolútnym maximom (minimom) funkcie $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \to \boldsymbol{R}$ na množine A nazývame najväčšiu (najmenšiu) hodnotu funkcie f na množine A, ak existuje.

4.4.4 Derivácia funkcie v danom smere. Gradient

Definícia 4.19 *Nech $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \to \boldsymbol{R}$. Nech A je otvorená množina, $a \in A$ a nech $\boldsymbol{u}$ je jednotkový vektor z $\boldsymbol{R}^n$ (t. j. $\| \boldsymbol{u} \| = 1$). Ak existuje*

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(a + t\boldsymbol{u}) - f(a)}{t},$$

tak ju nazývame **deriváciou funkcie f v bode a v smere vektora $\boldsymbol{u}$** a označujeme $\dfrac{df(a)}{d\boldsymbol{u}}$.



Nech $f = f(x_1, x_2, x_3)$ je diferencovateľná v bode $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in D(f)$ a nech $\boldsymbol{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Potom

$$\frac{df(a)}{d\boldsymbol{u}} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \cos\alpha + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} \cos\beta + \frac{\partial f(a)}{\partial x_3} \cos\gamma.$$

Definícia 4.20 *Vektor*

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(a)}{\partial x_3}\boldsymbol{k}$$

nazývame **gradientom funkcie** f *v bode* a *a označujeme ho* $\operatorname{grad} f(a)$.

Vzhľadom na definíciu 4.20 platí

$$\frac{df(a)}{d\boldsymbol{u}} = (\operatorname{grad} f(a), \boldsymbol{u}).$$

4.4.5 Vektorová funkcia. Divergencia. Rotácia

Nech $M \subset \boldsymbol{R}^n$ a nech V je vektorový priestor. Funkciu $\boldsymbol{f}$, ktorá každému bodu $x \in M$ priradí práve jeden prvok $\boldsymbol{v} \in V$, nazývame vektorovou funkciou n premenných.

Ak $n = 3$ a v priestore $V = \boldsymbol{R}^3$ je daný pravouhlý súradnicový systém s jednotkovými vektormi $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, môžeme každú vektorovú funkciu zapísať v tvare

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{i} + f_2(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{j} + f_3(x_1, x_2, x_3)\boldsymbol{k}.$$

Funkcie f_i, $i = 1, 2, 3$ nazývame zložkami vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}$ a ich definičný obor je totožný s definičným oborom funkcie $\boldsymbol{f}$. Pre danú vektorovú funkciu platia nasledujúce tvrdenia:

1. $\boldsymbol{f}$ má v bode $a = (a_1, a_2, a_3)$ limitu práve vtedy, ak v bode a majú limitu funkcie f_i, $i = 1, 2, 3$. Platí

$$\lim_{x\to a} \boldsymbol{f}(x) = [\lim_{x\to a} f_1(x)]\boldsymbol{i} + [\lim_{x\to a} f_2(x)]\boldsymbol{j} + [\lim_{x\to a} f_3(x)]\boldsymbol{k},$$

2. $\boldsymbol{f}$ je spojitá na množine M práve vtedy, ak sú na M spojité funkcie f_i, $i = 1, 2, 3$,

3. $\boldsymbol{f}$ má parciálnu deriváciu podľa k-tej premennej na množine M práve vtedy, ak na množine M majú parciálne derivácie podľa k-tej premennej jej zložky. Potom platí

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_k}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_k}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_k}\boldsymbol{k}.$$

Skalárnu funkciu definovanú vzťahom

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3}$$

nazývame **divergenciou** vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}$ a označujeme div $\boldsymbol{f}$, teda

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3}.$$

Vektorovú funkciu

$$\left(\frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{k}$$

nazývame **rotáciou vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}$** a označujeme ju rot $\boldsymbol{f}$.

Vo vektorovej analýze sa často používa vektorový **operátor nabla** ∇ (ktorému hovoríme aj Hamiltonov operátor), pričom

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{k}.$$

Pre tento operátor definujeme nasledujúce operácie:

1. Symbolom $\nabla f(x)$ definujeme rovnosť

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_3}\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} f(x).$$

2. Skalárny súčin operátora ∇ a vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}(x) = f_1(x)\boldsymbol{i} + f_2(x)\boldsymbol{j} + +f_3(x)\boldsymbol{k}$ je

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f}(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}.$$

3. Vektorový súčin operátora ∇ a vektorovej funkcie $\boldsymbol{f}(x) = f_1(x)\boldsymbol{i} + f_2(x)\boldsymbol{j} + +f_3(x)\boldsymbol{k}$ je

$$\nabla \times \boldsymbol{f}(x) = \operatorname{rot} \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \end{vmatrix}.$$

Často sa používa tiež tzv. **Laplaceov operátor**

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

pričom

$$\triangle f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2}.$$