12.6 Postačujúce podmienky existencie predmetu v LT

Veta 12.8 *Nech pre komplexnú funkciu F komplexnej premennej p platí:*

- *Existuje také reálne číslo α_0, že F je analytická funkcia v polrovine* $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.
- *Nech ďalej pre ľubovoľné $a > \alpha_0$ existuje taká postupnosť kružníc (K_n) so stredmi v bode 0 a s polomermi R_n, pre ktoré platí $|a| < R_1 < R_2 < \cdots < R_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$, že ak označíme symbolom M_n^+ maximum modulu funkcie F na časti kružnice K_n ležiacej v polrovine $\operatorname{Re} p \geq a$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^+ = 0$.*
- *Integrál $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(p)|dp$ má konečnú hodnotu.*

Potom funkcia f, definovaná Riemannovym-Mellinovym vzorcom je predmet s indexom rastu, ktorý nie je väčší ako α_0, pričom funkcia f je spojitá na $(-\infty, \infty)$ a platí $f(t) \div F(p)$.

Predmet $f(t)$ je výhodné počítať pomocou základnej vety o rezíduách a modifikácií Jordanovej lemy.

Veta 12.9 *Nech funkcia F je analytická v $\boldsymbol{C}$ s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $a_k \in \boldsymbol{C}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ a nech pre ľubovoľné reálne číslo a také, že $a > \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|\}$, platí:*

- *Existuje taká postupnosť kružníc (K_n) so stredmi v bode 0 a s polomermi R_n, pre ktoré platí $|a| < R_1 < R_2 < \cdots < R_n < \ldots$ a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$, že ak označíme $M_n = \max|F(p)|$ (p sú z vnútra K_n), tak $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.*
- *Integrál $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(p)|dp$ má konečnú hodnotu.*

Potom existuje spojitý predmet f na $(-\infty, \infty)$, ktorý je určený predpisom

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_k}, \quad t > 0,$$

$$f(t) = 0, \quad t \leq 0,$$

pričom $f(t) \div F(p)$.

Lema 12.1 *(modifikácia Jordanovej lemy) Nech a je ľubovoľné reálne číslo a nech je daná postupnosť kružníc (K_n), kde $K_n(\tau) = R_n e^{i\tau}, \tau \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $|a| < R_1 < R_2 < \cdots < R_n < \ldots$ a $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$. Tú časť kružnice K_n, ktorá leží v polrovine $\operatorname{Re} p \geq a$, označme K_n^+. Nech komplexná funkcia F komplexnej premennej p je konečná a spojitá vo vnútri K_n, $n \in \boldsymbol{N}$. Označme $M_n^+ = \max|F(p)|$ pre p z vnútra K_n^+. Nech $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^+ = 0$ a nech $t < 0$ je dané číslo. Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n^+} F(p)e^{pt}dt = 0.$$