4.3 Parciálne derivácie

4.3.1 Parciálne funkcie a parciálne derivácie prvého rádu

Nech funkcia $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \rightarrow \boldsymbol{R}$ je definovaná na istom okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Touto funkciou sú definované zároveň funkcie jednej premennej $g_i : B \rightarrow \boldsymbol{R}$

$$g_i(x_i) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Funkcia $g_i(x_i)$ je funkcia jednej premennej definovaná na istom okolí bodu $a_i \in \boldsymbol{R}$ a nazývame ju **parciálna funkcia** funkcie f premennej x_i.

Ak existuje vlastná derivácia funkcie g_i v bode a_i, t. j. ak existuje konečná limita

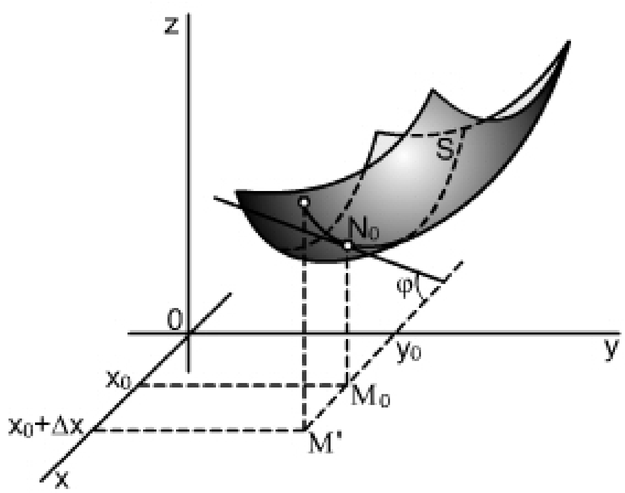
$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{x_i - a_i} = g'(a_i),$$

potom číslo $g'(a_i)$ nazývame **parciálnou deriváciou prvého rádu funkcie** f v bode a podľa premennej x_i a označujeme buď $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ alebo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $f'_{x_i}(a)$, $f_{x_i}(a)$, $f_{\cdot i}(a)$.

Pre funkciu dvoch premenných, kde $a = (x_0, y_0)$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}. \end{aligned}$$

Pri počítaní parciálnych derivácii danej funkcie postupujeme tak, ako v prípade funkcie jednej premennej. Totiž pri počítaní parciálnej derivácie funkcie $f(x_1, \ldots, x_n)$, napríklad podľa x_i, považujeme túto funkciu len za funkciu premennej x_i. Ostatné premenné považujeme za konštanty.



Príklad 4.9 *Nech* $f : \mathbf{R^3} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x \cos(y + z) + 2^{xy}$. *Vypočítajme* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Riešenie. Pri výpočte $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ považujeme y, z za konštanty, teda

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot \cos(y + z) + 2^{xy} y \ln 2.$$

Pri výpočte $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ považujeme x, y za konštanty, teda

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -x \sin(y+z).$$

4.3.2 Geometrický význam parciálnych derivácií funkcie $f : \mathbf{R^2} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$

Nech $f : \mathbf{R^2} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$, $z = f(x,y)$. Nech bod $M = (a,b) \in A$. Funkcie $g_1(x) = f(x,b)$, $g_2(y) = f(a,y)$ sú parciálne funkcie k funkcii $f : A \to \mathbf{R}$. Vektor $\boldsymbol{u} = (1, 0, f_x(a,b))$ je smerový vektor dotyčnice ku grafu funkcie g_1 v bode $T = (a, b, f(a,b))$. Vektor $\boldsymbol{v} = (0, 1, f_y(a,b))$ je smerový vektor dotyčnice ku grafu funkcie g_2 v bode $T = (a, b, f(a,b))$. Preto vektor $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je normálový vektor dotykovej roviny α ku ploche $z = f(x,y)$ v bode T. Teda $\mathbf{n} = (-\mathbf{f_x}(\mathbf{a},\mathbf{b}), -\mathbf{f_y}(\mathbf{a},\mathbf{b}), \mathbf{1})$.

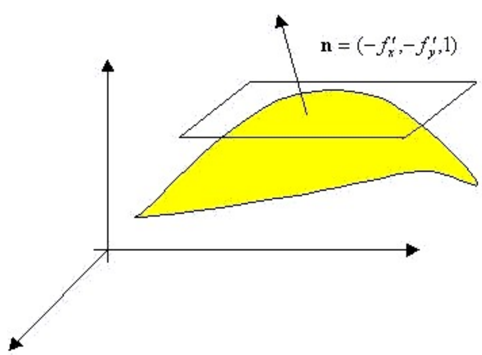
Ak $X = (x,y,z)$ je ľubovoľný bod dotykovej roviny, potom $(X - T) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$. To znamená, že

$$-(x-a) f_x(a,b) - (y-b) f_y(a,b) + (z - f(a,b)) = 0 \tag{1}$$

je rovnica dotykovej roviny ku ploche f v bode T a

$$\frac{x-a}{-f_x(a,b)} = \frac{y-b}{-f_y(a,b)} = \frac{z - f(a,b)}{1}$$

je rovnica normály.



Príklad 4.10 *Nech* $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ *a* $M = (a,b) = (1,2)$. *Nájdime rovnicu dotykovej roviny ku ploche* f *v bode* $T = (1, 2, 14)$.

Riešenie. Normálový vektor dotykovej roviny α v bode $T(1,2,14)$ je $\mathbf{n} = (-\mathbf{4}, -\mathbf{12}, \mathbf{1})$. Teda

$$-(x-1)(-4) - (y-2)(-12) + (z-14) = 0$$

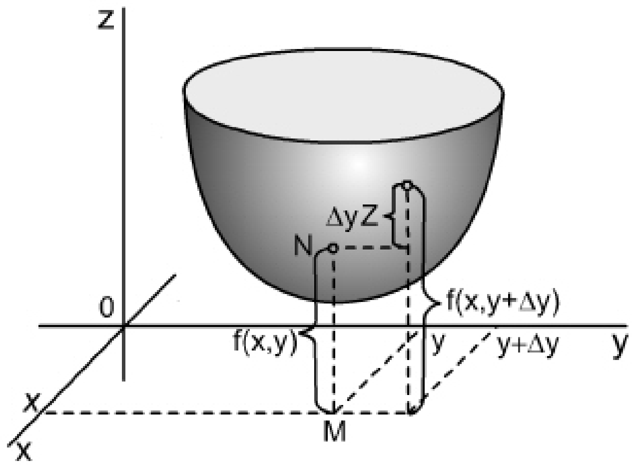
je rovnica dotykovej roviny.

4.3.3 Lagrangeova veta o prírastku funkcie. Totálny diferenciál

Veta 4.15 *(***Lagrangeova veta***) Nech funkcia* $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ *je definovaná na istom okolí bodu* $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ *a nech na tomto okolí má parciálnu deriváciu podľa každej svojej premennej. Nech* $b = (b_1, \dots, b_n) \in A$ *je ľubovoľný bod tohto okolia. Potom v tomto okolí existujú body* $P_1 = (\xi_1, b_2, \dots, b_n)$, $P_2 = (a_1, \xi_2, \dots b_n)$, $\dots$, $P_n = (a_1, a_2, \dots, \xi_n)$ *také, že*

$$f(b) - f(a) = f_{x_1}(P_1)(b_1 - a_1) + f_{x_2}(P_2)(b_2 - a_2) + \cdots + f_{x_n}(P_n)(b_n - a_n)$$

a $\rho(P_i, a) < \rho(a,b)$, $i = 1, \dots, n$.



Podobne ako pre funkciu $f : \mathbf{R} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ môžeme definovať diferencovateľnosť funkcie $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \to \boldsymbol{R}$.

Nech funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ je definovaná na istom okolí $O(a)$, kde $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. Hovoríme, že funkcia f je **diferencovateľná** v bode a, ak existujú také čísla $K_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$ a funkcia $w : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ v bode a spojitá a taká, že $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ pričom platí

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} K_i(x_i - a_i) + \omega(x)\rho(x, a). \tag{2}$$

Funkciu $\sum\limits_{i=1}^{n} K_i(x_i - a_i)$ nazývame **totálny (úplný) diferenciál** funkcie $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ v bode $a \in A$ a označujeme ho $\mathrm{d}f(a, x)$. Teda

$$\mathrm{d}f(a, x) = \sum_{i=1}^{n} K_i(x_i - a_i). \tag{3}$$

Z definície diferencovateľnosti funkcie vyplývajú nasledujúce vety:

Veta 4.16 *Ak funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$, tak je v tomto bode spojitá.*

Veta 4.17 *Ak funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná v bode a, potom existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, $\quad i = 1, \ldots, n$ a pre čísla K_i vystupujúce v definícii úplného diferenciálu platí*

$$K_i = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Poznámka 4.9 *Z Vety 4.18, vzhľadom na 3 pre $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ platí*

$$\mathrm{d}f(a, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i - a_i). \tag{4}$$

Teraz uvedieme postačujúcu podmienku pre diferencovateľnosť funkcie v bode a.

Veta 4.18 *Ak v istom okolí $O(a)$ existujú parciálne derivácie $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $\quad i = 1, \ldots, n$ pričom tieto derivácie sú spojité v bode a, tak funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ je diferencovateľná v bode a.*

4.3.4 Parciálne derivácie zložených funkcií

Pre parciálne derivácie zloženej funkcie

$$f(g_1(x_1,\dots,x_m), g_2(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m))$$

platí

Veta 4.19 *Nech funkcie* $g_i : \mathbf{R^m} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{B} \subset \mathbf{R}$, $u_i = g_i(x_1,\dots,x_m)$, $i = 1,2,\dots,n$ *sú diferencovateľné v bode* $a = (a_1,\dots,a_m) \in A$. *Nech funkcia* $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{B} \to \mathbf{R}$ *je diferencovateľná v bode* $b = (g_1(a), g_2(a),\dots,g_n(a)) \in B$. *Potom zložená funkcia* $F : A \to \mathbf{R}$, *definovaná vzťahom*

$$F(x_1,\dots,x_m) = f(g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m))$$

je diferencovateľná v bode a. Potom pre parciálne derivácie funkcie F platí

$$\frac{\partial F(a)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(b)}{\partial u_1}\frac{\partial g_1(a)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(b)}{\partial u_2}\frac{\partial g_2(a)}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f(b)}{\partial u_n}\frac{\partial g_n(a)}{\partial x_i},$$

$i = 1,\dots,m$

Poznámka 4.10 *Nech* $F(x,y) = f(u,v) = f(g_1(x,y), g_2(x,y))$, *bod* $a = (x_0,y_0)$, $b = (u_0,v_0) = (g_1(x_0,y_0), g_2(x_0,y_0))$. *Potom*

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\frac{\partial g_1(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\partial g_2(x_0,y_0)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\frac{\partial g_1(x_0,y_0)}{\partial y} + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\partial g_2(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

Poznámka 4.11 *Nech* $F(x) = f(u,v) = f(g_1(x), g_2(x))$ *a nech* $b = (u_0,v_0) = (g_1(x_0), g_2(x_0))$. *Potom*

$$\frac{\mathrm{d}F(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\frac{\mathrm{d}g_1(x_0)}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\mathrm{d}g_2(x_0)}{\mathrm{d}x}.$$

Ak ďalej $g_1(x) = x$, *tak*

$$\frac{\mathrm{d}F(x_0)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u} + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\mathrm{d}g_2(x_0)}{\mathrm{d}x}.$$

Príklad 4.11 *Nájdime* $\frac{dz}{dt}$, *ak* $z = e^{5x-2y}$, *kde* $x = t^2$ *a* $y = t^3$.

Riešenie. Na základe poslednej poznámky dostávame

$$\frac{dz}{dt} = 5e^{5x-2y}(2t) + e^{5x-2y}(-2)3t^2 =$$

$$= e^{5t^2-2t^3}(10t - 6t^2).$$

4.3.5 Parciálne derivácie vyššieho rádu

Nech funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ má v nejakom okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ parciálnu deriváciu f_{x_i} podľa i-tej premennej. Ak existuje derivácia funkcie f_{x_i} podľa j-tej premennej v bode $a \in A$, nazývame ju parciálnou deriváciou druhého rádu funkcie f v bode a podľa i-tej a j-tej premennej (v tomto poradí) a označujeme ju

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{alebo} \quad f''_{x_i x_j}(a), \quad \text{alebo} \quad f_{x_i x_j}(a) \quad \text{, alebo} \quad f''_{ij}(a).$$

Ak $i = j$ namiesto

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_i} \quad \text{píšeme} \quad \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2}.$$

Nech funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ má v okolí bodu $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ parciálnu deriváciu $(k-1)$-ho rádu $f^{(k-1)}_{i_1 \dots i_{k-1}}$, kde $i_1, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, n\}$. Označme $g = f^{(k-1)}_{i_1 \dots i_{k-1}}$. Ak funkcia g má v bode $a \in A$ parciálnu deriváciu (prvého rádu) podľa i_k-tej premennej, tak ju nazývame **parciálnou deriváciou k-tého rádu** funkcie f v bode a podľa premenných s indexami $i_1, \dots, i_k$ (v tomto poradí) a označujeme jedným z výrazov

$$f^{(k)}_{i_1 \dots i_k}(a), \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a).$$

Poznámka 4.12 *Nech $f''_{ij}(x)$,$f''_{ji}(x)$ sú spojité v bode $a \in A$, potom platí $f''_{ji}(a) = f''_{ij}(a)$*

4.3.6 Diferenciál vyššieho rádu. Taylorov vzorec

Definícia 4.13 *Hovoríme, že funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ má v bode $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ diferenciál k-tého rádu, ak v istom okolí $O(a) \subset A$ má funkcia f všetky parciálne derivácie $(k-1)$-ho rádu a tieto derivácie sú diferencovateľné v bode a.* **Diferenciálom k-tého rádu** *funkcie f v bode a, pre bod $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ rozumieme funkciu*

$$\mathrm{d}^k f(a, x) := \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - a_n) \right]^k f(a).$$

Pod symbolom použitým v poslednej definícii rozumieme toto: formálne utvoríme k-tú mocninu výrazu v zátvorke a potom namiesto k-tých mocnín znakov $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ napíšeme $\dfrac{\partial^k}{\partial x_i^k} f(a)$.

Veta 4.20 *(***Taylorova veta***) Nech funkcia $f : \mathbf{R^n} \supset \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ je z C^{k+1} v okolí $O(a) \subset A$. Potom $(\forall x \in O(a))(\exists \theta \in (0,1))$ tak, že platí*

$$f(x) = d^0 f(a, x) + \frac{1}{1!} d^1 f(a, x) + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(a, x) + R_k(x),$$

kde

$$R_k(x) = \frac{1}{(k+1)!} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n - a_n) \right]^{k+1} f(a + \theta(x - a)).$$

Pre funkciu $z = f(x, y)$, pre $a = (x_0, y_0)$, $x = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$, platí

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} h_2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_1, y_1)}{\partial x^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1, y_1)}{\partial y \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(x_1, y_1)}{\partial y^2} h_2^2 \right],$$

kde $x_1 = x_0 + \theta h_1$, $y_1 = y_0 + \theta h_2$, $\theta \in (0, 1)$.