

## 6.7 Cvičenia 6

1. Nájdite lineárnu diferenciálnu rovnicu tretieho rádu bez pravej strany, ktorej fundamentálny systém je:

a)  $e^x, e^{-x}, e^{2x}$ ;

b)  $e^x, x, x^2$ ;

c)  $x, x^{-2}, -x \ln x$ .

$$\begin{aligned} [y''' - 2y'' - y' + 2y &= 0] \\ [y''' + \frac{x^2}{-x^2+2x-2}y'' - \frac{2x}{-x^2+2x-2}y' - \frac{2}{-x^2+2x-2}y &= 0] \\ [y''' + 3x^{-1}y'' - 2x^{-2}y' + 2x^{-3}y &= 0] \end{aligned}$$

2. Nájdite riešenia diferenciálnych rovníc:

a)  $y'' - 5y' + 4y = 0$ ;

b)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ;

c)  $y'' + 2y' + y = 0$ ;

d)  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ;

e)  $y'' + 2y' + 4y = 0$ ;

f)  $y'' + 9y = 0$ .

$$[y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}]$$

$$[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}]$$

$$[y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}]$$

$$[y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}]$$

$$[y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)]$$

$$[y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x]$$

3. Nájdite riešenia diferenciálnych rovníc:

a)  $y''' - 4y'' + 5y' = 0$ ;

b)  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ ;

c)  $y''' + 8y = 0$ ;

d)  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ ;

e)  $y^{(4)} + y''' + 5y'' + 4y = 0$ .

$$[y = C_1 + e^{2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)]$$

$$[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}]$$

$$[y = C_1 e^{-2x} + e^x(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x)]$$

$$[y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)]$$

$$[y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + C_3 \cos \sqrt{3}x + C_4 \sin \sqrt{3}x]$$

4. Nájdite riešenia diferenciálnych rovníc:

a)  $y'' - 4y' = 4$ ;

b)  $y'' + y = \operatorname{tg} x$ ;

c)  $y'' - y' = e^x$ ;

d)  $y'' - 6y' + 9y = x e^{-3x} + 1 - x^2$ ;

e)  $y'' - 6y' + 9y = \sin 2x$ .

$$[y = C_1 + C_2 e^{4x} - x - 1/4]$$

$$[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + [\ln \operatorname{tg}(\pi/4 - x/2)]]$$

$$[y = C_1 + C_2 e^x - e^x + x e^x]$$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + e^{-3x}(x + 1/3)/36 - x^2/9 - 4x/27 + 1/27]$$

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + (5 \sin 2x + 12 \cos 2x)/169]$$

5. Nájdite riešenia diferenciálnych rovníc:

a)  $y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$ ;

b)  $y'' + 9y = e^x \cos 3x$ ;

c)  $y'' + y = 4 \cos x + (x^2 + 1)e^x$ ;

d)  $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$ ;

e)  $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5 \sin 2x$ .

$$[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (5 \cos 3x - \sin 3x)/6]$$

$$[y = (C_1 + e^x/37) \cos 3x + (C_2 + 6e^x/37) \sin 3x]$$

$$[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \sin 2x + e^x(1 - x + x^2/2)]$$

$$[y = e^{2x}(C_1 x + C_2 + x^3/6)]$$

$$[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x/2 + (9 - \sin 2x + 3 \cos 2x)/4]$$

6. Nájdite riešenia diferenciálnych rovníc:

a)  $y'' + 4y = 1/\cos 2x$ ;

b)  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ ;

$$[y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 0, 25 \cos 2x \ln \cos 2x + 0, 5x \sin 2x]$$

$$[y = (C_1 + C_2 x + 0, 5x^2 \ln x - 3x^2/4)e^{-2x}]$$

$$\begin{array}{ll}
\text{c) } y'' + y' = e^{2x} \cos e^x; & [y = C_1 + C_2 e^x - \cos e^x] \\
\text{d) } y'' - 2y' + y = e^x/x; & [y = e^x(C_1 + C_2 x) + x e^x \ln |x|] \\
\text{e) } y'' + 2y' + y = e^{-x}/x. & [y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + x e^{-x} \ln |x|]
\end{array}$$

7. Nájdite riešenia diferenciálnych rovníc:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } y'' + 4y = x \sin 2x; & [y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - (2x^2 \cos 2x - x \sin 2x)/16] \\
\text{b) } y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \sin x; & [y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 0,5 e^{2x} \sin x] \\
\text{c) } y'' + y = \sin x - 2e^{-x}; & [y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 0,5 x \cos x - e^{-x}] \\
\text{d) } y'' + y = \operatorname{tg}^2 x; & [y = -2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \operatorname{tg} (x/2 + \pi/4)] \\
\text{e) } y'' - y' = 1/(1 + e^x), \text{ ak } y(0) = 1, y'(0) = 2. & [y = -x + e^x(3 - \ln 2 - x) + (1 + e^x) \ln(1 + e^x) - 2 - \ln 2]
\end{array}$$

8. Riešte sústavu diferenciálnych rovníc:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } y' + 2y + 4z = 1 + 4x; z' + y - z = 3x^2/2; & [y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + x^2 + x] \\
& [z = -C_1 e^{2x} + 0,25 C_2 e^{-3x} - 0,5 x^2] \\
\text{b) } y' = y + 5z; z' + y + 3z = 0; & [y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)] \\
& [z = 0,2 e^{-x}[(C_2 - 2C_1) \cos x - (C_1 + 2C_2) \sin x]] \\
\text{c) } y' = -3y - z; z' - y + z = 0; & [y = (C_1 - C_2 - C_1 x)e^{-2x}, z = (C_1 x + C_2)e^{-2x}] \\
\text{d) } y' = -3y - 4z + 2x; z' - y - z = x \text{ pre } y(0) = z(0) = 0; & [y = 14(1 - e^{-x}) - 2x(3 + 4e^{-x})] \\
& [z = -9(1 - e^{-x}) + x(5 + 4e^{-x})] \\
\text{e) } y' = y^2/z; z' - y/2 = 0; & [y = 2C_1/(C_2 - x)^2, z = C_1/(C_2 - x)]
\end{array}$$