2.1 Pojem bodovej a rovnomernej konvergencie

Začneme štúdiom postupnosti funkcií.

Nech pre každé $n \in \mathbf{N}$ sú definované na neprázdnej množine A funkcie f_n. Budeme hovoriť, že na A je definovaná **postupnosť funkcií** $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 2.1 *Nech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií na A. Nech pre každé $x \in A$, je postupnosť $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergentná. Potom hovoríme, že postupnosť $(f_n)_{n=1}^{\infty}$* **konverguje bodovo** *na A (k funkcii $f : A \to \mathbf{R}$, $\quad f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$). Zapisujemo to tiež: $f_n \to f$ na A alebo $f_n(x) \to f(x)$ na A.*

Príklad 2.1 *Dokážme, že postupnosť funkcií $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na intervale $\langle 0, 1\rangle$.*

Riešenie. Pre $x \in \langle 0, 1)$ sa $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ a pre $x = 1$ sa $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$. Preto postupnosť $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodovo na intervale $\langle 0, 1\rangle$ k funkcii

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \in \langle 0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{array} \right.$$

Všimneme si, že postupnosť spojitých funkcií $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodovo k nespojitej funkcii.

Poznámka 2.1 *Nech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na A. Zápis $f_n \to f$ na A znamená, že*

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, n > n_0) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definícia 2.2 *Nech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií na A a nech $f : A \to \mathbf{R}$ je funkcia. Nech*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}, n > n_0)(\forall x \in A) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Potom hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **konverguje na A rovnomerne** *(k funkcii $f : A \to \mathbf{R}$). Píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na A alebo $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na A.*

Teda ak postupnoť $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na A rovnomerne k funkcii f, tak na A konverguje aj bodovo k funkcii f. Opačné tvrdenie neplatí.

Veta 2.1 *Postupnosť funkcií $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na A rovnomerne (k nejakej funkcii $f : A \to \mathbf{R}$) práve vtedy, keď platí*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n, m \in \mathbf{N}, m > n_0, n > n_0)$$

$$(\forall x \in A) : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Definícia 2.3 *Nech $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií na A. Potom výraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ budeme nazývať* **nekonečným radom funkcií** *(definovaných) na A.*

*Funkciu f_n nazývame n-***tým členom** *tohto radu funkcií.*

*Funkciu $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ nazývame n-***tým čiastočným súčtom** *tohto radu funkcií.*

Ak postupnosť funkcií $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na A bodovo k funkcii $s : A \to \mathbf{R}$, tak hovoríme, že rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na A **bodovo** k funkcii s, a že funkcia s je súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ na A.

Hovoríme, že rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na A rovnomerne k funkcii $s : A \to \mathbf{R}$, keď postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na A **rovnomerne** k funkcii s.

Veta 2.2 *(Bolzano-Cauchyho kritérium) Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne na A práve vtedy, keď*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n, m \in \mathbf{N}, m > n > n_0)(\forall x \in A)$$

$$: |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon.$$

Definícia 2.4 *Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je rad funkcií na A. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je číselný rad s nezápornými členmi a nech pre každé $x \in A$ a každé $n \in \mathbf{N}$ platí $|f_n(x)| \leq a_n$. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývame* **majorantným radom** *k radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ na A.*

Veta 2.3 *(Weierstrassovo majorantné kritérium) Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je rad funkcií na A. Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný, majorantný rad k radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Potom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje rovnomerne a absolútne na A.*