5.1 Základné pojmy 5

Pri matematickej formulácii niektorých úloh z technickej praxe sú rovnice, v ktorých sa vyskytujú neznáme funkcie a ich derivácie. Takéto rovnice nazývame diferenciálne rovnice. Budeme sa zaoberať prípadom, kde neznáma funkcia je reálna funkcia a derivácie sú obyčajné (nie parciálne) derivácie. Takéto diferenciálne rovnice nazývame **obyčajné diferenciálne rovnice**. Teda obyčajná diferenciálna rovnica je vzťah medzi nezávisle premennou x, neznámou funkciou $y(x)$ a jej deriváciami. Možno ju zapísať v tvare

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0.$$

Diferenciálna rovnica je n - tého rádu, ak v nej vystupuje n - tá derivácia neznámej funkcie, ale už nijaká derivácia rádu vyššieho ako n.

Príklad 5.1 *Pre určenie prúdu I v závislosti na čase t v elektrickom obvode je možné zostaviť použitím Ohmovho a Kirchoffovho zákona rovnicu $RI + LdI/dt = U$. Po úprave dostávame*

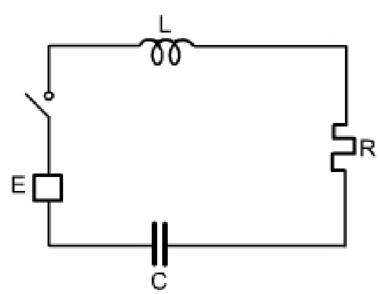
$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U}{L}.$$

Tejto rovnici vyhovuje každá funkcia

$$I(t) = \frac{U}{R} + Ce^{-(R/L)t},$$

kde C je ľubovoľná konštanta. O tom sa môžeme presvedčiť dosadením tejto funkcie a jej derivácie do pôvodnej rovnice. Ak doplníme úlohu o "začiatočnú podmienku" $I(0) = 0$, dostaneme výpočtom príslušnej konštanty C funkciu

$$I(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-(R/L)t}).$$



Funkciu $y = \varphi(x)$, definovanú na intervale J, ktorá pre každé $x \in J$ splňuje vzťah $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$, nazývame **riešenie diferenciálnej rovnice** na intervale J. Vyriešiť diferenciálnu rovnicu $F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$ znamená nájsť všetky jej riešenia.

Graf riešenia diferenciálnej rovnice nazývame **integrálnou krivkou** tejto diferenciálnej rovnice.

Rovnice, v ktorých neznáma funkcia je funkciou viac premenných a v ktorej sa vyskytujú parciálne derivácie neznámej funkcie nazývame **parciálne diferenciálne rovnice**. Napríklad rovnica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

je tzv. Laplaceova rovnica.

Niektoré úlohy vedú k sústavam diferenciálnych rovníc.

Pretože sa budeme zaoberať len obyčajnými diferenciálnymi rovnicami, budeme označenie obyčajné vynechávať.

V tejto kapitole sa budeme zaoberať diferenciálnymi rovnicami, v ktorých sa vyskytuje len prvá derivácia neznámej funkcie, t.j. diferenciálnymi rovnicami prvého rádu a to takými, ktoré sa dajú zapísať v tvare $y' = f(x, y)$. Uvedieme niekoľko typov takýchto diferenciálnych rovníc a metód, ktoré nám umožnia nájsť riešenia týchto rovníc. Metódy riešenia niektorých ďalších typov rovníc sú uvedené v prílohe resp. v citovanej literatúre

Definícia 5.1 *Nech funkcia* $y : I \to \mathbf{R}$ *je riešením diferenciálnej rovnice* $y' = f(x, y)$ *a* $y(x_0) = y_0$. *Potom hovoríme, že riešenie* $y : I \to \mathbf{R}$ *prechádza bodom* (x_0, y_0) *alebo spĺňa (Cauchyho) začiatočnú podmienku* $y(x_0) = y_0$.

Diferenciálnu rovnicu spolu so začiatočnou podmienkou nazývame Cauchyho (alebo začiatočnou) úlohou. Riešiť začiatočnú úlohu znamená nájsť všetky riešenia danej diferenciálnej rovnice, ktoré prechádzajú bodom $[x_0, y_0]$.