6.5 Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientmi so špeciálnou pravou stranou

Nech v diferenciálnej rovnici

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \qquad (L1P)$$

kde a_i, $i = 1, \ldots, n$ sú reálne čísla, má funkcia f *špeciálny tvar*.

1. Ak $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, kde α je k-násobným charakteristickým koreňom príslušnej lineárnej diferenciálnej rovnice $(L1)$, $k \geq 0$, tak riešenie y^* rovnice $(L1P)$ má tvar $y^* = x^kQ_m(x)e^{\alpha x}$, kde polynóm Q_m je polynóm m-tého stupňa.

2. Ak $f(x) = e^{\alpha x}(P_{n1}^{(1)}(x)\cos\beta x + P_{n2}^{(2)}(x)\sin\beta x)$, kde polynómy $P_{n1}^{(1)}$, resp. $P_{n2}^{(2)}$ sú polynómy stupňa n_1, resp. n_2, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ a $\beta \neq 0$, k je násobnosť charakteristického koreňa príslušnej diferenciálnej rovnice $(L1)$, tak riešenie y^* rovnice $(L1P)$ má tvar $y^* = x^ke^{\alpha x}(Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x)$, kde polynómy $Q_m^{(1)}, Q_m^{(2)}$ sú vhodné polynómy stupňa $m = \max\{n_1, n_2\}$.

3. Ak $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ a y_i^* je riešenie diferenciálnej rovnice $L(y) = f_i(x)$, $i = 1, 2$, tak $y^* = y_1^* + y_2^*$.

Príklad 6.5 *Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' - 3y' + 2y = e^{1\cdot x} + 6e^{-1\cdot x}$.

Riešenie. Odpovedajúca charakteristická rovnica $r^2 - 3r + 2 = 0$ má korene $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Všeobecné riešenie rovnice bez pravej strany je $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. Riešenie pravej strany y^* budeme hľadať v tvare $y_1^* + y_2^*$, kde $y_1^* = Ax^1e^{1\cdot x}$ ($r_1 = 1$ je koreňom odpovedajúcej charakteristickej rovnice)a $y_2^* = Be^{-1\cdot x}$. Po dosadení do pôvodnej rovnice (postupne y_1^*, y_2^*) a porovnaní koeficientov dostaneme $y_1^* = -xe^x$, $y_2^* = e^{-x}$. Teda všeobecné riešenie danej rovnice s pravou stranou je $y_1^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x + e^{-x}$.