2.2 Konvergencia mocninového radu

Mocninovým radom nazývame rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \dots, \tag{1}$$

kde $x_0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sú reálne čísla (v komplexnej analýze sa uvažujú komplexné čísla) a $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Čísla a_n nazývame koeficienty a číslo x_0 stred daného mocninového radu.

Mocninový rad so stredom v bode $x_0 = 0$ má tvar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Veta 2.4 *I. Ak konverguje rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *v bode* $c \neq x_0$*, tak konverguje (absolútne) pre všetky* x*, pre ktoré platí* $|x-x_0| < |c-x_0|$ *(t.j. konvergencia v intervale* $(x_0 - r, x_0 + r)$*, kde* $r = |x_0 - c|$*).*
II. Ak diverguje rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *v bode* x_1*, tak diverguje v každom bode* x*, pre ktorý platí* $|x-x_0| > |x_1-x_0|$ *(t.j. diverguje na množine* $\mathbf{R} \setminus \langle x_0-\rho, x_0+\rho\rangle$*, kde* $\rho = |x_1 - x_0|$*).*

Veta 2.5 *Pre mocninový rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *nastáva práve jeden z týchto prípadov:*
a) daný rad konverguje len v bode $x = x_0$*,*
b) daný rad konverguje pre každé $x \in \mathbf{R}$*,*
c) existuje číslo $\rho > 0$ *také, že na intervale* $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ *daný rad konverguje a na množine* $\mathbf{R} \setminus \langle x_0-\rho, x_0+\rho\rangle$ *daný rad diverguje.*

Ak nastane prípad c) číslo ρ je **polomer konvergencie** mocninového radu a interval $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ **interval konvergencie** daného radu. Ak nastane prípad b), tak polomerom konvergencie je $\rho = \infty$. Ak nastane prípad a), tak polomer konvergencie je $\rho = 0$. Pretože mocninový rad na intervale konvergencie konverguje absolútne môžeme použiť pre zisťovanie intervalu konvergencie kritéria pre absolútnu konvergenciu číselných radov.

Veta 2.6 *Ak existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$*, resp.* $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lambda$*, tak polomer konvergencie mocninového radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je:*

- $\rho = 1/\lambda$ *pre* $0 < \lambda < +\infty$*;*
- $\rho = +\infty$ *pre* $\lambda = 0$*;*
- $\rho = 0$ *pre* $\lambda = +\infty$*.*

Príklad 2.2 *Nájdime polomer konvergencie mocninového radu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}.$$

Riešenie. Interval konvergencie nájdeme podľa vety **??**. Vypočítajme $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$. Máme:

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}}{\frac{1}{3^n n}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Teda polomer kovergencie daného mocninového radu je $\rho = 1/(1/3) = 3$ a interval konvergencie je $(-2, 4)$. Skúmajme ešte konvergenciu daného radu v krajných bodoch intervalu konvergencie. Hodnotou daného radu v čísle $x = -2$ je rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Tento rad konverguje a teda aj pôvodný rad konverguje v čísle $x = -2$. Pre $x = 4$ dostávame

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Tento rad diverguje a teda v čísle $x = 4$ diverguje aj pôvodný rad. Teda daný mocninový rad konverguje na intervale $\langle -2, 4)$.