1.1 Pojem nekonečného číselného radu, jeho konvergencia a divergencia

Často sa stretávame s nasledujúcim problémom. Pre danú postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je potrebné nájsť súčet všetkých jej členov (ak existuje). Napríklad potrebujeme určiť, či existujú súčty postupností

$$\begin{aligned}
\left((-1)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}: &\qquad 1-1+1-1+\cdots \\
\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}: &\qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \\
\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n=1}^{\infty}: &\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \\
\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}: &\qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots
\end{aligned}$$

Teda budeme sa sa zaoberať nekonečnými radmi reálnych čísel.

Definícia 1.1 *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom výraz*

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\ldots \quad \text{resp.} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazývame **nekonečným (číselným) radom**. *Číslo a_n nazývame n-tým členom tohto radu.*

Ak chceme spočítať konečnú postupnosť čísel $a_1+a_2+\cdots+a_n$ môžeme postupovať tak, že vytvoríme postupne tzv. čiastočné súčty

$$s_1=a_1,\ s_2=a_1+a_2,\ \ldots, s_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1},\ s_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n.$$

Čiastočné súčty môžeme vytvoriť tiež pre nekonečné číselné rady. Dostaneme postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definícia 1.2 *Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad. Potom*

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\cdots+a_n$$

nazývame n-**tým čiastočným súčtom** *radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Ak je postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, tak číslo $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ nazývame **súčtom radu** *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je* **konvergentný**, *použijeme označenie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.*

Keď je postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ divergentná, hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentný**.

Príklad 1.1 *Nájdime súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.*

Riešenie. Pre n-tý člen tohto radu platí $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ a pre n-tý čiastočný súčet platí

$$s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} [1 - \frac{1}{n+1}] = 1$. Daný rad je teda konvergentný a jeho súčet je $s = 1$, teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Veľmi dôležitý je tzv. **geometrický rad**

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}.$$

Príklad 1.2 *Ukážme, že pre $|q| < 1$ geometrický rad je konvergentný a pre jeho súčet platí $s = \frac{1}{1-q}$.*

Riešenie. V prípade, ak $q = 0$, tak $s_n = 1$ pre každé $n \in \mathbf{N}$, teda $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$. Rad je preto konvergentný a pre jeho súčet platí $s = \frac{1}{1-q}$. Nech je teraz $|q| < 1$ ale $q \neq 0$. Pre n-tý čiastočný súčet platí $s_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Pretože $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

Je možné približne určiť súčet tak, že neuvažujeme členy, ktoré sú v absolútnej hodnote "malé"? Ak by sme v nasledujúcich príkladoch zanedbali "malé" členy, tak:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \approx \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} = 0.8333.$ Na základe Príkladu 1.1 vidíme, že súčet tohoto radu sme odhadli s chybou $0,02$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0.7833.$ V ďalšom ukážeme, že sme sa dopustili chyby menšej ako $\frac{1}{6}$.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 3.2317.$ V tomto prípade sme sa dopustili značného omylu, pretože teraz

  $$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

  a teda

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

Tento rad diverguje, preto pri hľadaní súčtov radov musíme byť opatrní.