10.11 Test 10

1. T10-1 (3b) δ- okolím bodu $z_0 = x_0 + iy_0$ nazývame množinu bodov:

   (a) $O_\delta(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : \quad \rho(z, z_0) < \delta\}$,

   (b) $O_\delta(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : \quad |z - z_0| < \delta\}$,

   (c) $O_\delta(z_0) = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} : \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$.

2. T10-2 (4b) Kružnicu so stredom v bode $z_0 = x_0 + iy_0$ a polomerom $r = 2$, môžeme vyjadrit v tvare:

   (a) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4$,

   (b) $x = x_0 + 2\cos t,\ y = y_0 + 2\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$,

   (c) $z = (x_0 + 2\cos t) + i\,(y_0 + 2\sin t) = z_0 + 2e^{i\,t},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$,

   (d) $|z - z_0| = 4$.

3. T10-3 (2b) Nech je daná funkcia
   $f : \mathbf{C} \supset D_f \to \mathbf{C},\ f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ a nech $z_0 = x_0 + i\,y_0$ je vnútorný bod množiny D_f. Nech funkcia f má deriváciu v bode z_0. Potom sú funkcie u, v diferencovateľné v bode (x_0, y_0) a platí

   (a) $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$,

   (b) $u_x(x_0, y_0) = -v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)$,

   (c) $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i\,u_y(x_0, y_0)$,

   (d) $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) - i\,v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) + i\,u_y(x_0, y_0)$.

4. T10-4 (3b) Exponenciálna funkcia e^z má vlastnosť:

   (a) $e^z = e^x \cos y + i\,e^x \sin y$,

   (b) je periodická funkcia s periódou $2\pi\, i$,

   (c) je periodická funkcia s periódou 2π,

   (d) pre $z \in \mathbf{C}$ je $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,

   (e) funkcia e^z je analytická, pričom $(e^z)' = e^z$.

5. T10-5 (2b) Goniometrické funkcie pre každé číslo $z \in \mathbf{C}$ definujeme takto:

   (a) $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

   (c) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$,

   (b) $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$,

   (d) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$.

6. T10-6 (3b) Nech funkcia f je spojitá na oblasti Ω. Nech $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ a nech Γ je po castiach hladká (orientovaná) krivka. Potom existuje integrál funkcie f na krivke Γ a platí:

(a) $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y)dx + v(x,y)dy$,

(b) $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int\limits_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$,

(c) $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = i \int\limits_{\Gamma} v(x,y)dx + u(x,y)dy$.

7. T10-7 (3b) Nech na oblasti Ω je funkcia f analytická. Nech Γ je jednoduchá uzavretá kladne orientovaná krivka, ktorá leží so svojím vnútrom A v oblasti Ω. Nech bod z leží vo vnútri krivky $\Gamma (z \in A)$. Potom platí:

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$,

   (b) $\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$,

   (c) $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma} \dfrac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n = 1, 2, \ldots$.

8. T10-8 (2b) Funkcia $f(z) = z^{-2}(1 - \cos z)$ má v bode $z_0 = 0$:

   (a) odstránitelný singulárny bod,

   (b) má v bode $z_0 = 0$ pól násobnosti $m = 2$.

9. T10-9 (2b) Nech funkcia f má v bode z_0 m-násobný pól, potom platí

   (a) $\operatorname{res}[f(z)]_{z=z_0} = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$.

   (b) $\operatorname{res}[f(z)]_{z=z_0} = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)]$.