9.2 Nezávislosť krivkového integrálu od integračnej cesty

Pri výpočte integrálov druhého druhu sa stretneme s integrálmi, ktoré nezávisia od integračnej cesty C, ale iba od začiatočného bodu A a koncového bodu B integračnej cesty. Také integrály budeme označovať $\int\limits_A^B \boldsymbol{f}(P)\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$.

Veta 9.3 *Nech $\boldsymbol{f}$ je spojitá vektorová funkcia na oblasti G. Krivkový integrál $\int \boldsymbol{f}(P)\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$ nezávisí od integračnej cesty na množine vtedy a len vtedy, keď existuje taká funkcia $U(P)$, že*

$$\boldsymbol{f}(P) = \operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

na oblasti G.

Funkciu U nazývame *potenciálom funkcie $\boldsymbol{f}$*.

Veta 9.4 *Nech množina G je oblasť. Nech $\boldsymbol{f}$ je vektorová funkcia definovaná na množine G. Ak integrál $\int\limits_C \boldsymbol{f}(P)\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$ nezávisí od integračnej cesty na množine G, tak pre ľubovoľnú uzavretú krivku C_0 ležiacu v oblasti G platí:*

$$\oint\limits_{C_0} \boldsymbol{f}(P)\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

Otvorená množina G v $\boldsymbol{R}^2$ sa nazýva jednoducho súvislá, ak množina G je súvislá a ak vnútro ľubovoľnej jednoduchej uzavretej krivky C obsiahnuté v množine G je celé obsiahnuté v množine G.

Veta 9.5 *(Greenova veta). Nech A je uzavretá množina, ktorá má tú vlastnosť, že jej hranica C je kladne orientovanou, jednoduchou, uzavretou a po častiach hladkou krivkou. Nech funkcie $p(x,y), q(x,y), p'_y(x,y), q'_x(x,y)$, sú spojité na A. Potom platí*

$$\iint\limits_A [q'_x(x,y) - p'_y(x,y)]dxdy = \oint\limits_C p(x,y)dx + q(x,y)dy. \tag{1}$$

Príklad 9.4 *Pomocou Greenovej vety vypočítajte $\oint\limits_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy$, kde l je obvod trojuholníka s vrcholmi $A = (1;1)$, $B = (2;2)$, $C = (1;3)$, pričom (A,B,C) je trojica usporiadaná v zmysle orientácie krivky l.*

Riešenie. Pre výpočet použijeme vzťah (5.5). Teda

$$\oint\limits_l 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy = \int\limits_{\triangle ABC}\int [2(x+y) - 4y]dxdy =$$

$$= 2\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{-x+4} (x-y)dy = \cdots = -4/3.$$