12.3 Rovina komplexných čísel

V tejto stati uvedieme stručne niektoré poznatky o komplexných číslach tak, ako boli uvedené v predmete Lineárna algebra [?].

Komplexné číslo je usporiadaná dvojica reálnych čísel (x, y), pričom je definovaná rovnosť dvoch komplexných čísel a operácie sčítania a násobenia takto:

1. Dve komplexné čísla (x_1, y_1), (x_2, y_2) sa rovnajú práve vtedy, ak $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$.

2. Súčet dvoch komplexných čísel (x_1, y_1), (x_2, y_2) je komplexné číslo $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

3. Súčin dvoch komplexných čísel (x_1, y_1), (x_2, y_2) je komplexné číslo $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Na označenie množiny komplexných čísel použijeme označenie $\boldsymbol{C}$. Komplexné číslo $i = (0, 1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou**, pričom $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \ldots$. Pomocou neho ľubovoľné komplexné číslo $z \in \boldsymbol{C}$ môžeme zapísať v *v algebraickom tvare* $z = x + i\,y$, kde $x, y \in \boldsymbol{R}$, kde číslo $x = \operatorname{Re} z$ nazývame *reálna* a číslo $y = \operatorname{Im} z$ *imaginárna časť komplexného čísla* z.

Komplexné číslo $\bar{z} = x - i\,y$ nazývame *komplexne združeným* číslom k číslu $z = x + i\,y$ a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nazývame *modulom (absolútnou hodnotou)* komplexného čísla z.

Rovine so zvoleným pravouhlým súradnicovým systémom $(O; o_x, o_y)$, ktorej body (x, y) znázorňujú komplexné čísla $z = x + i\,y$, hovoríme **Gaussova rovina**. Os o_x sa nazýva *reálna os*, os o_y *imaginárna os*.

Nech $z \neq 0$, $z = x + i\,y$. Každé číslo $\varphi \in \boldsymbol{R}$, pre ktoré platí

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$$

nazveme **hodnotou argumentu** čísla z. Za základný budeme považovať argument z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, tzv **hlavná hodnota argumentu komplexného čísla**, a označujeme ho $\varphi = \arg z$.

V literatúre sa niekedy definuje hlavná hodnota argumentu komplexného čísla $z \in \boldsymbol{C} - \{0\}$ takto $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Nech φ_0 je hodnota argumentu čísla z, $z \neq 0$. Množinu čísel tvaru $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, kde $k \in \boldsymbol{Z}$, nazývame **argument komplexného čísla** a označujeme ju $\operatorname{Arg} z$. Teda

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \boldsymbol{R} : \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Každé komplexné číslo $z \neq 0$ môžeme zapísať, a to jednoznačne, v tvare

$$z = |z|(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \tag{1}$$

(tzv. **goniometrický** tvar), alebo v tvare

$$z = |z|e^{i\,\varphi} \tag{2}$$

(tzv. **exponenciálny** tvar komplexného čísla), kde $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Z toho, čo sme doteraz uviedli vyplýva, že každé číslo $z \in \boldsymbol{C}$ môžeme chápať ako pevný rovinný vektor $z = (x, y)$ s normou $\| z \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ vychádzajúci zo začiatku súradnicovej sústavy a v prípade $z \neq (0, 0)$ zvierajúceho s kladnou reálnou polosou uhol veľkosti $\arg z$.

Pre ľubovoľné reálne (aj komplexné) číslo φ platí Eulerov vzťah:

$$e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi.$$

Ak $z_1, z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, tak:

- $z_1\, z_2 = |z_1|\, |z_2| e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}$,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}$,
- $z_1^n = |z_1|^n\, e^{i\,n\varphi_1}$,
- pre hodnoty $\sqrt[n]{z_1}$ platí:

$$\sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|} e^{i\,\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$