10.2 Postupnosti komplexných čísel a číselné rady s komplexnými členmi

V MA(1) sme sa zaoberali vlastnosťami postupností a radov reálnych čísel. V MA(2) sme sa zaoberali postupnosťami bodov vo viacrozmerných priestoroch. Teraz sa budeme zaoberať vlastnosťami postupnosti a radov, ktorých členmi sú komplexné čísla. Uvedieme niektoré základné vlastnosti postupností komplexných čísel a číselných radov s komplexnými členmi.

Nech $z_n \in \boldsymbol{C}$ pre každé $n \in \boldsymbol{N}$, $z_n = x_n + i\, y_n$, $x_n, y_n \in \boldsymbol{R}$. Potom postupnosť $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ nazývame **postupnosťou komplexných čísel** a postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, resp. $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ **postupnosť jej reálnych** , resp. **imaginárnych častí.** V prípade, keď bude z textu zrejmé, aké hodnoty nadobúda index n, budeme označovať postupnosti iba $(z_n), (x_n), (y_n)$.

Pojem limity postupnosti komplexných čísel definujeme podobne ako pri postupnostiach reálnych čísel.

Definícia 10.3 *Nech $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel. Hovoríme, že postupnosť $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ má* **limitu** *$z \in \boldsymbol{C}^*$, ak k ľubovoľnému okoliu $O(z)$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ také, že pre všetky $n \in \boldsymbol{N}, n > n_0$ platí $z_n \in O(z)$. Píšeme $z_n \to z$ alebo $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.*

Postupnosť (z_n), ktorá má limitu v $\boldsymbol{C}$, sa nazýva konvergentná, ak nemá limitu v $\boldsymbol{C}$, nazýva sa divergentná.

Veta 10.1 *Nech $z_n = x_n + i\, y_n \in \boldsymbol{C}$, $z_n^{'} = x_n^{'} + i\, y_n^{'} \in \boldsymbol{C}$ pre všetky $n \in \boldsymbol{N}$, potom platí:*

- *postupnosť (z_n) má najviac jednu limitu,*
- *postupnosť (z_n) je ohraničená práve vtedy, keď sú ohraničené postupnosti (x_n), (y_n),*
- *$z_n = x_n + i\, y_n \to z = x + i\, y$ vtedy a len vtedy, keď súčasne platí $x_n \to x$, $y_n \to y$,*
- *ak $z_n \to z$, tak pre ľubovoľnú vybranú postupnosť $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ platí $z_{n_k} \to z$,*
- *ak postupnosť (z_n) konverguje v $\boldsymbol{C}$, tak je ohraničená,*
- *nech $z_n \to z$, $z_n^{'} \to z^{'}$, potom $z_n + z_n^{'} \to z + z^{'}$, $z_n \cdot z_n^{'} \to z \cdot z^{'}$ a ak $z_n^{'} \in \boldsymbol{C} - \{0\}$ pre všetky $n \in \boldsymbol{N}$, pričom $z^{'} \in \boldsymbol{C} - \{0\}$, potom $\frac{z_n}{z_n^{'}} \to \frac{z}{z^{'}}$.*

Definícia 10.4 *Nech je daná postupnosť $(z_n), z_n \in \boldsymbol{C}$. Výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots$$

sa nazýva **komplexný číselný rad** *a číslo z_n* **n-tý člen radu**. *Číslo $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ sa nazýva* **n-tý čiastočný súčet** *a postupnosť (s_n)* **postupnosť čiastočných súčtov tohto radu**.

Konvergenciu, divergenciu, absolútnu a relatívnu konvergenciu číselných radov definujeme podobne ako pre rady, ktorých členy sú reálne čísla. Absolútna konvergencia tu má väčší význam, pretože rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, kde $z_n \in \boldsymbol{C}$ pre všetky $n \in \boldsymbol{N}$, je rad s reálnymi nezápornými členmi. To znamená, že pri rozhodovaní o absolútnej konvergencii radov s komplexnými členmi môžeme použiť kritériá konvergencie radov, ktorých členy sú reálne čísla. Tieto kritériá môžeme použiť tiež pri rozhodovaní o relatívnej konvergencii radov s komplexnými členmi.

Veta 10.2 *Nech* $z_n \in \boldsymbol{C}$, $z_n = x_n + i\, y_n$, *pre* $n \in \boldsymbol{N}$. *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje vtedy a len vtedy, keď konvergujú rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. *Ak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *konverguje, potom platí* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.