10.4 Komplexná funkcia reálnej premennej a krivky v Gaussovej rovine

V súvislosti s určovaním rovinných kriviek v Gaussovej rovine sa budeme zaoberať špeciálnym prípadom komplexnej funkcie komplexnej premennej $f : \boldsymbol{R}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}$, ktorú nazývame **komplexnou funkciou reálnej premennej**. Teda $w = f(t) = u(t) + i\,v(t)$ (tiež $z = x(t) + i\,y(t)$), $t \in D_f$. Pretože ide o špeciálny prípad komplexnej funkcie komplexnej premennej, zostávajú v platnosti vety o limitách a spojitosti tak, ako boli uvedené v predchádzajúcej časti. Komplexné číslo $w = f(t)$ možno chápať ako vektor v rovine. Ak funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{C}$ je spojitá na množine $\langle a, b\rangle$, tak koncový bod $f(t)$ tohto vektora opisuje v Gaussovej rovine krivku, ktorú nazývame **hodografom vektora** $w = f(t)$.

Funkcia $f : \boldsymbol{R}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}$ má v bode $t_0 \in D_f$ deriváciu $f'(t_0)$ práve vtedy, keď existuje konečná limita

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\triangle t\to 0} \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t} = f'(t_0).$$

Je zrejmé, že

$$\lim_{\triangle t\to 0} \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t} = \lim_{\triangle t\to 0} \frac{x(t_0 + \triangle t) - x(t_0)}{\triangle t} +$$

$$+ i \lim_{\triangle t\to 0} \frac{y(t_0 + \triangle t) - y(t_0)}{\triangle t} = x'(t_0) + i\,y'(t_0) = f'(t_0).$$

Podobne definujeme tiež $f'_-(t_0)$, $f'_+(t_0)$.

Body krivky $z = f(t)$, v ktorých $f'(t) = 0$ nazývame **singulárnymi bodmi krivky** (dvojné body, body vratu a pod.). Pre výpočet derivácie komplexnej funkcie reálnej premennej platia rovnaké pravidlá ako pre funkciu reálnej premennej (derivácia súčtu, rozdielu, súčinu, podielu), neplatia však vety o strednej hodnote.

Určitý integrál, resp. neurčitý integrál funkcie f definujeme vzťahmi

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i \int_a^b y(t)dt, \qquad \int f(t)dt = \int x(t)dt + i \int y(t)dt.$$

Pojem krivky je nám známy z MA(1), kde sme sa stretli s pojmami: parametrické rovnice krivky, jednoduchá krivka, jednoduchá uzavretá krivka, hladká a po častiach hladká krivka. Ak množina γ je grafom krivky $f : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{C}^*$, nazývame túto množinu krivkou a funkciu f jej parametrizáciou.

Často budeme potrebovať rôzne vyjadrenia kriviek. Majme napríklad kružnicu so stredom v bode (x_0, y_0) a polomerom R. Uvedieme niektoré možnosti vyjadrenia jej rovnice:

- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – poznáme už zo strednej školy,
- $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$ – parametrické vyjadrenie,
- $z = (x_0 + R\cos t) + i\,(y_0 + R\sin t) = z_0 + Re^{i\,t}$, kde $z_0 = x_0 + y_0$ – ako graf komplexnej funkcie reálnej premennej,
- $|z - z_0| = R$.

Pod pojmom **orientovanej krivky** rozumieme ľubovoľné zobrazenie $\gamma : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{C}$, kde bod $\gamma(a)$ je **začiatočný bod** a bod $\gamma(b)$ je **koncový bod krivky**. Krivka $\bar{\gamma}(t) = \gamma(-t)$, $t \in \langle -b, -a\rangle$ je **opačne orientovanou krivkou** ku krivke γ.

Nech $\gamma : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{C}$ je jednoduchá uzavretá krivka. Predstavme si, že sa pohybujeme po krivke γ od bodu odpovedajúcemu parametru a spojite s rastúcim parametrom t do bodu odpovedajúcemu parametru b. Ak pri tomto pohybe máme vnútro krivky po ľavej ruke – pohybujeme sa proti smeru pohybu hodinových ručičiek, tak o krivke γ hovoríme, že je **kladne orientovaná**, v opačnom prípade hovoríme, že je **záporne orientovaná**.