7.1 Dvojný integrál

Nech $f : \boldsymbol{R}^2 \supset A \to \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a nech $\sigma \subset A$ je ohraničená uzavretá oblasť, ktorá je zjednotením konečného počtu elementárnych oblastí. Rozdelíme oblasť σ na n častí tak, aby $\sigma = \cup_{i=1}^{n}\sigma_i$ a dve rôzne oblasti σ_i, σ_j nemali spoločné vnútorné body. Nech bod P_i je ľubovoľným bodom oblastí σ_i. Nech $f(P_i)$ je hodnota funkcie f v bode P_i a $\triangle\sigma_i$ je plošný obsah oblastí σ_i, $i = 1, \ldots, n$. Ak $f \geq 0$, potom $f(P_i)\triangle\sigma_i$ môžeme geometricky interpretovať ako objem valcovitého telesa s postavou σ_i a výškou $f(P_i)$. Celkový objem telesa zostrojeného nad oblasťou σ ohraničeného základnou rovinou $z = 0$ a grafom funkcie f je $V_n \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(Pi)\triangle\sigma_i = S(f, D_n)$. Túto sumu (nielen pre nezápornú funkciu) nazývame **integrálnym súčtom pre dvojný integrál** prislúchajúci danému deleniu D_n a danému výberu bodov P_i.

Ak delenie je také, že oblasti σ_i sú dvojrozmerné intervaly so stranami $\triangle x_i$, $\triangle y_i$, tak $S(f, D_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(Pi)\triangle x_i \triangle y_i$. Nech pre $n \in \boldsymbol{N}$ je D_n delenie oblasti σ na malé oblasti σ_i také, že pre $n \to \infty$ priemer $d(\sigma_i)$ oblasti σ_i konverguje k nule.

Takúto postupnosť delení nazývame **normálnou postupnosťou delení**.

Nech interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Nech $D^{(1)}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$, $D^{(1)} = (\langle x_{i-1}, x_i\rangle)_{i=1}^{n}$ a $D^{(2)}$ je delenie intervalu $\langle c, d\rangle$, $D^{(2)} = (\langle y_{j-1}, y_j\rangle)_{j=1}^{m}$.

Množinu intervalov $\langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ nazývame delením intervalu J.

Všimneme si úplnú analógiu integrálneho súčtu funkcie dvoch premenných s integrálnym súčtom funkcie jednej premennej. Teraz vyslovíme definíciu integrálu podobnú ako pre funkciu jednej premennej.

Definícia 7.1 *Číslo I nazývame dvojným integrálom z funkcie f na oblasti σ, ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ oblasti σ a pre ľubovoľné výbery bodov v súčtoch $S(f, D_n)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n) = I$.*

Integrál funkcie f na oblasti σ označujeme znakom

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)d\sigma \quad \text{alebo} \quad \iint\limits_{\sigma} f(x, y)dxdy.$$

Je možné ukázať, že

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ d(\sigma_i) \to 0}} S(f, D_n) = I \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall D_n : \| D_n \| < \delta) : |S(f, D_n) - I| < \varepsilon.$$

Ak existuje dvojný integrál funkcie f na intervale J, tak funkciu f nazývame integrovateľnou funkciou na intervale J.

Nech σ je ohraničená na množine $\boldsymbol{R}^n$. Funkciu $\chi_\sigma(X) = 1$, pre $X \in \sigma$ a $\chi_\sigma(X) = 0$, pre $X \notin \sigma$, nazývame **charakteristickou funkciou množiny** σ.

Funkcia f je integrovateľná na množine σ, ak funkcia $F_\sigma = \chi_\sigma f$ je integrovateľná na ľubovoľnom intervale J, ktorý obsahuje množinu σ a platí

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{J} F_\sigma(x, y)dxdy.$$

Nech σ je ohraničená množina. Ak existuje $\iint\limits_{\sigma} dxdy$, nazývame množinu σ **merateľnou**. Jej obsahom (mierou) nazývame číslo

$$m(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} dxdy.$$

Ak existuje dvojný integrál funkcie f na oblasti σ, tak funkciu f nazývame **integrovateľnou funkciou** na oblasti σ. V opačnom prípade hovoríme, že funkcia f nie je integrovateľná na oblasti σ.

Poznámka 7.1 *Každá spojitá funkcia na merateľnej množine σ je na tejto množine integrovateľná.*

Poznámka 7.2 *Ak funkcia f je na oblasti σ ohraničená a množina jej bodov nespojitosti má nulový obsah, tak je integrovateľná na oblasti σ.*