

3.4 Cvičenia 3

1. Nájdite Fourierov rad danej funkcie f v danom intervale:

$$(a) \quad f(x) = x^2, \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \left[\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \pi \frac{\sin nx}{n} \right) \right].$$

$$(b) \quad f(x) = |x|, \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \left[\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right].$$

$$(c) \quad f(x) = \operatorname{sign} x, \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \right].$$

$$(d) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \in \langle -\pi, 0 \rangle, \\ 1 & \text{pre } x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases} \quad \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \right].$$

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \\ \pi - x & \text{pre } x \in \langle \pi/2, \pi \rangle, \end{cases} \quad \left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n-2)x}{(2n-1)^2} \right].$$

2. Rozložte dané funkcie: a) do kosínusového radu, b) do sínusového radu na danom intervale:

$$(a) \quad f(x) = x, \langle 0, \pi \rangle. \quad [(a) \text{ Pozri cvičenie 1(b), } (b) \quad 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}].$$

$$(b) \quad f(x) = \pi/4 - x/2, \langle 0, \pi \rangle. \quad [(a) \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}].$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{pre } x \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \\ \pi/2 & \text{pre } x \in \langle \pi/2, \pi \rangle. \end{cases} \quad [(a) \quad \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n\frac{\pi}{2} - 1) \cos nx}{n^2} \\ (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n^2} \sin n\frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \sin nx]$$

3. Nájdite súčty radov

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

tak, že nájdete Fourierove rady periodických funkcií, ktoré vzniknú z funkcie $f(x) = x^2, x \in \langle 0, \pi \rangle$ jej párnym, resp. nepárnym periodickým pokračovaním, resp. periodickým pokračovaním funkcie $f(x) = x^2, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$[(a) \quad \frac{\pi^2}{6}, \quad (b) \quad \frac{\pi^2}{12}, \quad (c) \quad \frac{\pi^2}{8}].$$