6.1 Základné pojmy 6

Vieme , že ak F je daná funkcia $n+2$ premenných na nejakom obore, tak rovnicu

$$F(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

nazývame **obyčajnou diferenciálnou rovnicou rádu** n pre neznámu funkciu y.

V praxi sa často vyskytujú problémy, ktoré sa dajú vyjadriť pomocou systémov diferenciálnych rovníc.

Budeme sa zaoberať systémom n diferenciálnych rovníc prvého rádu s n neznámymi funkciami $x_1, \ldots, x_n$

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

kde f_i sú reálne funkcie definované na nejakej množine $D \subset R \times R^n$.

Často budeme skúmať systém (1) s n začiatočnými podmienkami

$$x_i(t_0) = x_{0i}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Výhodné je vektorové označenie

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{3}$$

so začiatočnými podmienkami

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{4}$$

kde

$$\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = (f_1(t, \boldsymbol{x}), \ldots, f_n(t, \boldsymbol{x}))^T.$$

Definícia 6.1 *Nech $f : D \to \boldsymbol{R}^n$. Nech J je interval a nech funkcia $u \;: J \to \boldsymbol{R}^n$ má spojitú deriváciu $u' : J \to R^n$. Nech platí $(t, u(t)) \in D \quad \forall \quad t \in J$ a $u'(t) = f(t, u(t))$. Potom funkciu u nazývame riešením systému (1).*

Nech $\boldsymbol{x}$ je riešenie systému (1). Rovnice $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ pre $t \in J$ určujú v $\boldsymbol{R}^{n+1}$ tzv. integrálnu krivku .

Poznámka 6.1 *Diferenciálnu rovnicu*

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

môžeme nahradiť systémom n diferenciálnych rovníc

$$x_i' = x_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, x_n' = f(t, x_1, \ldots, x_n).$$

Predpokladajme, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$ je riešením problému (3), (4) definované na nejakom intervale J. Integráciou (3) od t_0 do $t \in J$ dostávame integrálnu rovnicu

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{u}(\tau)) d\tau. \tag{5}$$

Začiatočný problém (2) je ekvivalentný nájdeniu všetkých spojitých funkcií u na J, ktoré spĺňajú integrálnu rovnicu (5).

O existencii a jednoznačnosti riešenia problému (3), (4) hovorí nasledujúca veta:

Veta 6.1 *Nech vektorová funkcia* $\boldsymbol{f}$ *je spojitá na uzavretej oblasti* $\omega = \{(t, \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n : | t - t_0 | \leq a, \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \| \leq b\}$*, kde* a, b *sú dané kladné reálne čísla.*

Nech funkcia $\boldsymbol{f}$ *splňuje Lipschitzovu podmienku na* ω *(t. j.* $\exists$ *taká konštanta* $L > 0$*, že pre ľubovoľné* $(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in \omega$ *platí* $\| \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \| \leq L \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|$*) a nech*

$$M = \max_{(t, \boldsymbol{x}) \in \omega} \| \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \| .$$

Potom existuje jediné riešenie problému (3), (4), ktoré je definované v intervale $\langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$*, kde*

$$\delta = \min \left(a, \frac{b}{M} \right) .$$

Poznámka 6.2 *Postačujúcou podmienkou pre to aby funkcie* f_i*,* $i = 1, \ldots, n$ *splĺňali Lipschitzovu podmienku na ohraničenej uzavretej oblasti, je spojitosť parciálnych derivácií funkcií* $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ *podľa všetkých premenných* x_i*,* $i = 1, \ldots, n$ *na tejto oblasti.*