7.6 Transformácia dvojného a trojného integrálu

Pre ďalšie potreby je výhodné vysloviť vetu o substitúcii pre určitý integrál takto:

Veta 7.5 *Nech φ je funkcia definovaná na intervale $J = \langle\alpha, \beta\rangle$. Nech $\varphi(t)$ má spojitú deriváciu $\varphi'(t)$, nerovnajúcu sa nule na J. Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na $\varphi(J) = \langle a, b\rangle$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt.$$

Tento vzorec môžeme zapísať aj takto

$$\int_{\varphi(J)} f(x)dx = \int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt.$$

Podobnú vetu môžeme vysloviť tiež pre viacrozmerné integrály. Pritom úlohu funkcie φ bude zastávať zobrazenie Φ, ktoré každému bodu $T = (t_1, \dots, t_n)$ nejakej množiny G v n-rozmernom priestore priradí bod $X = (x_1, \dots, x_n) = \Phi(T)$ v n-rozmernom priestore. Množinu G nazývame oborom zobrazenia Φ. Nech zobrazenie Φ je dané rovnicami $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_n)$, $i = 1, \dots, n$ je prosté na množine G.

Ak funkcie $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ majú prvé parciálne derivácie podľa všetkých premenných na otvorenej množine G, tak determinant

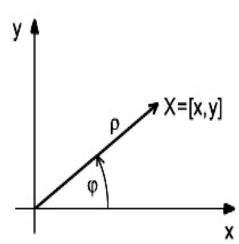
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_2}, & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_n} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_2}, & \dots & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}, & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_2}, & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

nazývame **Jacobiho funkcionálnym determinantom zobrazenia** Φ (**jakobiánom**) a označujeme ho $D_\Phi(T)$ alebo $D_\Phi(t_1, \dots, t_n)$.

Ak funkcie $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ majú spojité prvé parciálne derivácie podľa všetkých premenných na otvorenej množine G a pre každý bod $T \in G$ je $D_\Phi(T) \neq 0$, tak zobrazenie Φ nazývame **regulárnym na množine** G.

Príklad 7.1 *Nech zobrazenie Φ priradí každej dvojici čísel (ρ, φ) bod (x, y) podľa vzťahov*

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{1}$$

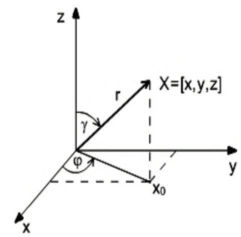


Toto zobrazenie sa volá **transformácia pomocou polárnych súradníc** *a je regulárne pre $\rho > 0$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Ak utvoríme jakobián, tak*

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi, & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho. \tag{2}$$

Príklad 7.2 *Nech zobrazenie Φ priradí každej trojici čísel (r,φ,γ) bod (x,y,z) podľa vzťahov*

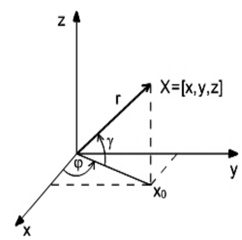
$$\begin{aligned} x &= r\sin\gamma\cos\varphi,\\ y &= r\sin\gamma\sin\varphi,\\ z &= r\cos\gamma. \end{aligned} \tag{3}$$



Toto zobrazenie sa volá **transformácia pomocou sférických (guľových) súradníc** *a je regulárne pre $r > 0$ a $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \gamma < \pi$. Ak utvoríme jakobián, tak $|D_\Phi| = r^2\sin\gamma$.*

Príklad 7.3 *Nech zobrazenie Φ priradí každej trojici čísel (r,φ,γ) bod (x,y,z) podľa vzťahov*

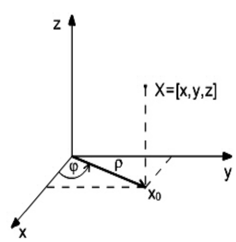
$$\begin{aligned} x &= r\cos\gamma\cos\varphi,\\ y &= r\cos\gamma\sin\varphi,\\ z &= r\sin\gamma. \end{aligned} \tag{4}$$



Toto zobrazenie sa volá **transformácia pomocou sférických (guľových) súradníc** *a je regulárne pre $r > 0$ a $0 < \varphi < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \dfrac{\pi}{2}$. Ak utvoríme jakobián, tak $|D_\Phi| = r^2\cos\gamma$.*

Príklad 7.4 *Nech zobrazenie Φ priradí každej trojici čísel (ρ,φ,z) bod (x,y,z) podľa vzťahov*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi,\\ y &= \rho\sin\varphi,\\ z &= z. \end{aligned} \tag{5}$$



Toto zobrazenie sa volá **transformácia pomocou cylindrických (valcových) súradníc** *a je regulárne pre $\rho > 0$ a $0 < \varphi < 2\pi$. Ak utvoríme jakobián, tak $|D_\Phi| = \rho$.*

Veta 7.6 *1. Nech zobrazenie Φ, dané rovnicami $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, je prosté a regulárne na oblasti $G \subset \boldsymbol{R}^2$ a túto oblasť zobrazí na oblasť $\Phi(G)$.*

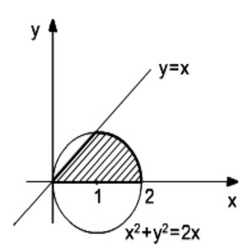
2. Nech $B \subset G$ a $\sigma \subset \Phi(G)$ sú pri zobrazení Φ sebe odpovedajúce uzavreté merateľné oblasti.

3. Nech $f(x,y)$ je integrovateľná funkcia na σ.
Potom platí:

$$\iint_\sigma f(x,y)dxdy = \iint_B f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\cdot|D_\Phi(u,v)|dudv. \tag{6}$$

Príklad 7.5 *Vypočítajme*

$$\iint_\sigma \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$



ak oblasť σ je ohraničená priamkami $y = 0$, $y = x$ a kružnicou $x^2 + y^2 = 2x$.

Riešenie. Zavedieme polárne súradnice. Kružnica, ohraničujúca oblasť σ, má tvar $\rho = 2\cos\varphi$. Oblasť σ môžeme popísať takto: $0 \le \varphi \le \pi/4$; $0 \le \rho \le 2\cos\varphi$. Platí

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} [\int\limits_0^{2\cos\varphi} d\rho] d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} [\rho]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} 2\cos\varphi d\varphi = \sqrt{2}.$$

Veta 7.7 *1. Nech zobrazenie Φ, dané rovnicami $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \mu(u,v,w)$ je prosté a regulárne na oblasti $G \subset \boldsymbol{R}^3$ a túto oblasť zobrazí na oblasť $\Phi(G)$.*

2. Nech $B \subset G$ a $\omega \subset \Phi(G)$ sú pri zobrazení Φ sebe odpovedajúce uzavreté merateľné oblasti.

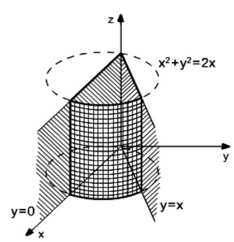
3. Nech $f(x,y,z)$ je integrovateľná funkcia na ω.
Potom platí:

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,y,z) dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{B} f[\varphi(u,v,w), \psi(u,v,w), \mu(u,v,w)] \cdot |D_\Phi(u,v,w)| dudvdw. \tag{7}$$

Príklad 7.6 *Vypočítajme*

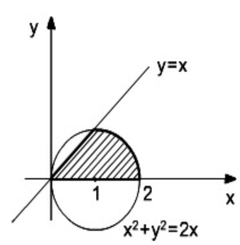
$$\iiint\limits_{\omega} z\sqrt{x^2+y^2} dxdydz,$$



ak oblasť ω je ohraničená rovinami $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 4$ a valcom $x^2 + y^2 = 2x$.

Riešenie. Oblasť ω môžeme popísať takto:

$$0 \le \varphi \le \pi/4,$$
$$0 \le \rho \le 2\cos\varphi,$$
$$0 \le z \le 4.$$



Ohraničenie pre súradnice ρ a φ určíme z priemetu oblasti ω do roviny (x,y). Platí

$$\iiint\limits_{\omega} z\sqrt{x^2+y^2} dxdydz = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\varphi \int\limits_0^4 z dz = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 [\frac{z^2}{2}]_0^4 d\rho =$$

$$\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 [\frac{z^2}{2}]_0^4 d\rho = 8 \int\limits_0^{\pi/4} [\frac{\rho^3}{3}]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \cdots = 128/9.$$

Príklad 7.7 *Vypočítajme*

$$\iiint\limits_{\omega} dxdydz,$$

ak oblasť ω *je ohraničená plochou* $(x^2+y^2+z^2)^3 = 3xyz$, *ak* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Riešenie. Oblasť ω môžeme popísať takto: $0 \le \varphi \le \pi/2$; $0 \le \gamma \le \pi/2$; $0 \le r \le \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\gamma\cos\gamma}$. Platí

$$\iiint\limits_{\omega} dxdydz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\gamma d\gamma \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\gamma\cos\gamma}} r^2 dr =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\gamma [r^3/3]_0^{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\gamma\cos\gamma}} d\gamma =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3\gamma\cos\gamma d\gamma =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi [(\sin^4\gamma)/4]_0^{\pi/2} d\varphi = \cdots = 1/8.$$

Poznámka 7.4 *Ak jakobián zobrazenia nemení znamienko a rovná sa nule*
- v jednotlivých bodoch alebo krivkách (pri dvojných integráloch),
- v jednotlivých bodoch alebo krivkách alebo plochách (pri trojných integráloch),
potom v mnohých prípadoch zostáva veta o transformácii dvojných, resp. trojných integrálov v platnosti. Opodstatnenosť tohto postupu v každom prípade treba vyšetriť zvlášť. V prípade transformácie pomocou polárnych, cylindrických alebo sférických súradníc posledné dve vety o transformácii platia aj za takto rozšírených predpokladov.