## 2.4 Taylorov rad

Ak existuje mocninový rad so stredom v bode $x_0$ taký, že v nejakom okolí bodu $x_0$ tento rad konverguje k funkcii $f$, hovoríme, že funkciu $f$ môžeme rozvinúť v okolí bodu $x_0$ do mocninového radu so stredom v bode $x_0$. Nech funkcia $f$ má v čísle $x_0$ derivácie všetkých rádov. Mocninový rad

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1}$$

(kde $f^{(0)} = f$) nazývame **Taylorovým radom funkcie** $f$ v čísle $x_0$.

Taylorov vzorec môžeme zapísať v tvare

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

kde $T_n(x)$ je $n$-tý čiastočný súčet Taylorovho radu. K tomu aby Taylorov rad konvergoval je nutné a stačí aby $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Pri rozvoji funkcií do Taylorovho radu môžeme niekedy použiť známe rozvoje do Taylorovho radu niektorých funkcií.

**Príklad 2.3** *Rozviňme funkciu* $f(x) = x\ln(1+x^2)$ *do mocninového radu so stredom* $x_0 = 0$.

*Riešenie.* Mocninový rad danej funkcie nájdeme pomocou radu funkcie $\ln(1 + x)$. Platí

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

pre $-1 < x < 1$. V poslednom rade, ak zameníme $x$ za $x^2$, dostaneme

$$\ln(1 + x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1)$$

a teda

$$x\ln(1 + x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{n} + \dots$$

pre $-1 < x < 1$.

Na nasledujúcom obrázku je uvedená aproximácia funkcie $f(x) = \sin x$ pomocou prvých členov (1, 3, 5, 7).