10.6 Elementárne funkcie komplexnej premennej

V tejto časti uvedieme niektoré elementárne funkcie a ich základné vlastností.

- **Polynómy komplexnej premennej**
  Polynómom komplexnej premennej nazývame funkciu

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

  komplexnej premennej, pričom $a_0, \ldots, a_n \in \boldsymbol{C}$ a $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vlastnosťami polynómov sme sa zaoberali v predmete Lineárna algebra.

- **Racionálna funkcia**
  Podiel dvoch polynómov komplexnej premennej, pričom menovateľ nie je nulový polynóm, nazývame **racionálnou funkciou** komplexnej premennej. Rozkladom racionálnej funkcie na parciálne zlomky sme sa zaoberali v predmete Lineárna algebra.

- **Exponenciálna funkcia** Pre každé $z = x + i\,y \in \boldsymbol{C}$ je daná funkcia $e^z = e^x \cos y + i\, e^x \sin y$.
  Niektoré základné vlastností:

  1. exponenciálna funkcia nenadobúda v žiadnom bode svojho definičného oboru hodnoty $0, \infty$, $\lim\limits_{z \to \infty} e^z$ neexistuje,
  2. $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$,
  3. pre $z \in \boldsymbol{C}$ platí $|e^z| = e^x$,
  4. e^z je periodická funkcia s periódou $2\pi\, i$, t. j. $\forall z \in \boldsymbol{C} : e^{z+2\pi\, i} = e^z$,
  5. $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_2 - z_1 = k \cdot 2\pi\, i$, $k \in \boldsymbol{Z}$,
  6. podobne ako pri reálnej premennej pre $z \in \boldsymbol{C}$ je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

  7. pre ľubovoľné $m \in \boldsymbol{Z}$ platí $(e^z)^m = e^{mz}$;
     pre racionálne číslo $r = \frac{m}{n}$ funkcia $(e^z)^r$ je n-značná na množine $\boldsymbol{C}$,
  8. funkcia e^z je pre každé $\alpha \in \boldsymbol{R}$ injektívna na každom z pásov
     $P_k = \{z \in \boldsymbol{C} : \quad \alpha + (k-1)2\pi < \operatorname{Im} z \le \alpha + k2\pi\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$,
  9. funkcia e^z je analytická na $\boldsymbol{C}$, pričom $(e^z)' = e^z$, zobrazenie $w = e^z$ je konformné v každom bode $z \in \boldsymbol{C}$, je však konformné len na takej oblasti, na ktorej je injektívne.

- **Logaritmická funkcia**
  Logaritmickú funkciu definujeme ako inverznú funkciu k exponenciálnej funkcii.

Definícia 10.13 *Pre každé* $z \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ *definujeme logaritmickú funkciu* $\operatorname{Ln} z$ *vzťahom*

$$\operatorname{Ln} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad z = e^w\}$$

Množinu $\operatorname{Ln} z$ nazývame **logaritmus komplexného čísla** z a jej prvky **hodnoty logaritmu čísla** z.

Je zrejmé, že inverzná funkcia k funkcii e^z je nekonečne mnohoznačná. Ku každému pásu $\{w \in \boldsymbol{C}: \quad (2k-1)\pi < \operatorname{Im} w \leq (2k+1)\pi\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, ktorý odpovedá pásu P_k (popísaného pri vlastnostiach funkcie e^z) pre $\alpha = \pi$ existuje taká jednoznačná vetva logaritmickej funkcie, ktorá zobrazuje množinu $\boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ na tento pás. Pre $k = 0$ dostaneme pás, ktorý je obrazom množiny $\boldsymbol{C} \backslash \{0\}$ pri zobrazení $w = \ln z$, t. j. pri zobrazení určenom hlavnou vetvou logaritmu. Funkcia $\ln z$ je analytická, pričom pre každé $z \in \boldsymbol{C} \backslash \{(-\infty, 0\rangle\}$ platí $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

Logaritmus ľubovoľného nenulového komplexného čísla z môžeme zapísať v tvare

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Hlavná hodnota logaritmu odpovedá hodnote $k = 0$. Známe vlastnosti logaritmu reálnych čísel platia tiež v množine komplexných čísel.

Z reálnej analýzy vieme, že pre $x \in (0, \infty)$ je mocnina x^a, kde $a \in \boldsymbol{R}$ definovaná vzťahom $x^a = e^{a \ln x}$. Podobne budeme definovať z^a pre $z \in \boldsymbol{C} - \{0\}$, $a \in \boldsymbol{C}$.

Definícia 10.14 *Pre číslo $a \in \boldsymbol{C}$ definujeme funkciu a-tá všeobecná mocnina predpisom*

$$z^a = \{w \in \boldsymbol{C}: \quad w = e^{a \operatorname{Ln} z}\},$$

kde $z \in \boldsymbol{C} - \{0\}$

- **Goniometrické funkcie**

  Pre každé číslo $z \in \boldsymbol{C}$ definujeme

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Základné vlastnosti:

1. Nech $z \in \boldsymbol{C}$. Potom
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$
2. Funkcie sin, cos sú na $\boldsymbol{C}$ jednoznačné, analytické a platí $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.
3. Nech $z, z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$. Potom platí: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$, $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$, $\sin z_1 \pm \sin z_2 = 2 \sin \frac{z_1 \pm z_2}{2} \cos \frac{z_1 \mp z_2}{2}$, $\cos z_1 + \cos z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \cos \frac{z_1 - z_2}{2}$, $\cos z_1 - \cos z_2 = -2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$.
4. Funkcie sin, cos sú na $\boldsymbol{C}$ sú periodické s periódou 2π.
5. Zobrazenie $w = \sin z$ je konformné vo všetkých bodoch množiny $\{z \in \boldsymbol{C}: \quad z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \boldsymbol{Z}\}$, zobrazenie $w = \cos z$ je konformné vo všetkých bodoch množiny $\{z \in \boldsymbol{C}: \quad z \neq k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\}$.
6. Nech $z \in \boldsymbol{C}$. Potom platí: $\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg}(-z) = -\operatorname{cotg} z$, $\operatorname{tg} z = (\operatorname{cotg} z)^{-1}$, $1 + \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$, $1 + \operatorname{cotg}^2 z = \frac{1}{\sin^2 z}$ (ak sú výrazy definované).
7. Funkcie $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$ sú jednoznačné a periodické s periódou π.

8. $\operatorname{tg} z$ je analytická v oblasti $\Omega_1 = \boldsymbol{C} \setminus \{z \in \boldsymbol{C} : z = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}\}$, $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$, funkcia $\operatorname{cotg} z$ je analytická v oblasti $\Omega_2 = \boldsymbol{C} \setminus \{z \in \boldsymbol{C} : z = k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$, $(\operatorname{cotg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$.

- **Hyperbolické funkcie**
Pre každé $z \in \boldsymbol{C}$ definujeme

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Platí: $\sinh z = -i \sin iz$, $\sin z = -i \sinh iz$, $\cosh z = \cos iz$,
$\cos z = \cosh iz$, $\operatorname{tgh} z = -i \operatorname{tg} iz$,$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{tgh} iz$, $\operatorname{cotgh} z = i \operatorname{cotg} iz$, $\operatorname{cotg} z = i \operatorname{cotgh} iz$.

- **Cyklometrické funkcie**
Budeme sa zaoberať inverznými funkciami ku goniometrickým funkciám:

$$\operatorname{Arcsin} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \sin w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{Arccos} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \cos w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{Arctg} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \operatorname{tg} w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C}^*,$$

$$\operatorname{Arccotg} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \operatorname{cotg} w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C}^*.$$

Cyklometrické funkcie sú nekonečne mnohoznačné funkcie.

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}, \quad \operatorname{Arccotg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}, \quad z \in \boldsymbol{C},$$

pričom $\operatorname{Arctg} \infty = (2k+1)\pi/2$, $\operatorname{Arccotg} \infty = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

- **Hyperbolometrické funkcie**
Budeme sa zaoberať inverznými funkciami ku hyperbolickým funkciám:

$$\operatorname{Arcsinh} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \sinh w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{Arccosh} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \cosh w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C},$$

$$\operatorname{Arctgh} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \operatorname{tgh} w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C}^*,$$

$$\operatorname{Arccotgh} z = \{w \in \boldsymbol{C} : \quad \operatorname{cotgh} w = z\} \quad \text{pre} \quad z \in \boldsymbol{C}^*.$$

Hyperbolometrické funkcie sú nekonečne mnohoznačné funkcie.

$$\operatorname{Arcsinh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1 + z^2}), \quad \operatorname{Arccosh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \quad \operatorname{Arccotgh} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}, \quad z \in \boldsymbol{C},$$

pričom $\operatorname{Arctgh} \infty = (2k+1)\pi\, i/2$, $\operatorname{Arccotgh} \infty = k\pi\, i$, $k \in \boldsymbol{Z}$.