11.4 Použitie Laplaceovej transformácie

Majme za úlohu nájsť riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s konštantnými koeficientami

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t)$$

pri začiatočných podmienkach

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0', \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$$

na intervale $\langle 0, \infty)$.

Nech $x(t) \div X(p)$, $f(t) \div F(p)$. Pomocou vety o derivovaní predmetu dostaneme

$$[p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - \cdots - x_0^{(n-1)}] + \cdots + a_{n-1}[pX(p) - x_0] + a_n X(p) = F(p).$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť obraz riešenia $X(p)$, platí

$$X(p) = \frac{F(p) + \Phi(p)}{L(p)},$$

kde $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n$ je **charakteristický polynóm** (danej diferenciálnej rovnice) a Φ je polynóm stupňa najviac $n-1$. Pre nulové začiatočné podmienky je $\Phi = 0$. Riešenie $x(t)$ danej diferenciálnej rovnice môžeme nájsť pomocou spätnej (LT).

Pretože x a f považujeme za predmety, je zrejmé, že $x(t) = 0$ pre $t < 0$. Ak začiatočné podmienky nie sú zadané v bode $t_0 = 0$ a ak chceme danú úlohu riešiť pomocou (LT), môžeme zameniť premennú t za $\tau = t - t_0$.

Príklad 11.3 *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $x'' + x = 3\sin 2t$ *vyhovujúce začiatočným podmienkam* $x(0) = x'(0) = 0$ *pre* $t \geq 0$.

Riešenie. Nech $x(t) \div X(p)$, potom $x'(t) \div pX(p)$, $x''(t) \div p^2 X(p)$, $\sin 2t \div \frac{2}{p^2+4}$. Potom dostaneme

$$p^2 X(p) + X(p) = 3\frac{2}{p^2+4} \Rightarrow X(p) = \frac{6}{(p^2+1)(p^2+4)} =$$

$$= \frac{2}{p^2+1} - \frac{2}{p^2+4} \div 2\sin t - \sin 2t = x(t).$$

Pri riešení diferenciálnych rovníc sme požadovali, aby začiatočné podmienky boli zadané v bode $t_0 = 0$. Majme za úlohu riešiť diferenciálnu rovnicu

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t)$$

pre začiatočné podmienky $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$, $t_0 \neq 0$. Môžeme postupovať takto. Položíme $\tau = t - t_0$, $u(\tau) = x(t_0 + \tau) = x(t)$, $g(\tau) = f(t_0 + \tau) = f(t)$ a nájdeme riešenie diferenciálnej rovnice

$$u''(\tau) + a_1 u'(\tau) + a_2 u(\tau) = g(\tau)$$

pre začiatočné podmienky $u(0) = x_0$, $u'(0) = x_0'$.

Teraz ukážeme, ako môžeme riešiť niektoré diferenciálne rovnice pomocou Duhamelovho integrálu. Nech

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t)$$

pri začiatočných podmienkach

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Odtiaľ môžeme vyjadriť obraz riešenia $X(p)$, platí

$$X(p) = \frac{F(p)}{L(p)},$$

kde $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n$. Predpokladajme, že poznáme riešenie y rovnice

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 1$$

pri začiatočných podmienkach

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Ak v (LT) $y(t) \div Y(p)$, dostaneme

$$Y(p) = \frac{1}{pL(p)},$$

kde $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n$. Z vyjadrenia $X(p)$ a $Y(p)$ dostaneme

$$X(p) = pF(p)Y(p).$$

Pomocou Duhamelovho integrálu sa dá hľadané riešenie $x(t)$ zapísať v tvare

$$x(t) = \int_0^t y'(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

alebo

$$x(t) = y(t) f(0+) + \int_0^t f'(\tau) y(t-\tau) d\tau.$$

Ak uvážime, že konvolúcia predmetov je komutatívna, platí

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) y'(t-\tau) d\tau$$

alebo

$$x(t) = y(t) f(0+) + \int_0^t y(\tau) f'(t-\tau) d\tau.$$

Laplaceovu transformáciu môžeme použiť pri riešení integrálnych alebo integrodiferenciálnych rovníc. Zároveň môžeme úspešne použiť Laplaceovu transformáciu pri riešení úloh z elektrotechniky.

Zhrnutie

Pre lepší prehľad uvedieme základné vety (iba tvrdenia) tabuľky korešpondencií predmet-obraz.

$\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \div \sum\limits_{k=1}^{n} c_k F_k(p)$	veta o lineárnosti
$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F(\frac{p}{\lambda}),\ \lambda > 0$	veta o podobnosti
$e^{at} f(t) \div F(p-a)$	veta o tlmení
Ak $f(t,\lambda) \div F(p,\lambda)$, tak $\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial \lambda} \div \frac{\partial F(t,\lambda)}{\partial \lambda}$	veta o derivovaní podľa parametra
$f(t-\tau)\eta(t-\tau) \div e^{-\tau p} F(p),\ \tau > 0$	veta o oneskorení
$f(t+\tau)\eta(t) \div e^{\tau p}[F(p) - \int\limits_0^t f(t) e^{-pt} dt]$	veta o predstihu
$f'(t) \div pF(p) - f(0+)$	veta o derivovaní predmetu
$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$	veta o integrovaní predmetu
$-tf(t) \div F'(p)$	veta o derivovaní obrazu
$\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty F(z) dz$	veta o integrovaní obrazu
$(f * g)(t) \div F(p)G(p)$	veta o násobení obrazov
$pF(p)G(p) \div f(0+)g(t) + (f' * g)(t) =$ $= g(0+)f(t) + (g' * f)(t)$	Duhamelov integrál
$f(t)g(t) \div \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) dz$	veta o násobení predmetov

Teraz uvedieme niektoré základné korešpondencie predmetov a obrazov v (LT):

Por. č.	Predmet	Obraz	Oblasť anal. funkcie F
1.	$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$	$\operatorname{Re} p > 0$
2.	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$
3.	e^{at}, $a \in \boldsymbol{C}$	$\dfrac{1}{p-a}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
4.	$t^n e^{at}$, $a \in \boldsymbol{C}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
5.	$\sin \omega t$, $\omega \in \boldsymbol{R}$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
6.	$\cos \omega t$, $\omega \in \boldsymbol{R}$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
7.	$\sinh \omega t$, $\omega \in \boldsymbol{R}$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\omega\rvert$
8.	$\cosh \omega t$, $\omega \in \boldsymbol{R}$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	$\operatorname{Re} p > \lvert\omega\rvert$
9.	$t \sin \omega t$, $\omega \in \boldsymbol{R}$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
10.	$t \cos \omega t$, $\omega \in \boldsymbol{R}$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$	$\operatorname{Re} p > 0$
11.	t^a, $a \in \boldsymbol{R}$, $a > -1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\operatorname{Re} p > 0$

Teraz uvedieme niektoré základné korešpondencie racionálnych obrazov a predmetov v (LT):

Por.č.	Obraz	Predmet
1.	1	$\delta(t)$
2.	$\dfrac{1}{1+ap}$	$\dfrac{1}{a}e^{\frac{-t}{a}}$
3.	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	te^{at}
4.	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
5.	$\dfrac{p}{(p-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
6.	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$
7.	$\dfrac{1}{p^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\sin at$
8.	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
9.	$\dfrac{1}{p^2+ap+b}$	$\dfrac{1}{\sqrt{K}}e^{\frac{-at}{2}}\sin\sqrt{K}t,\ K=b-\frac{a^2}{4}>0$ $te^{\frac{-at}{2}},\ K=0$ $\dfrac{1}{\sqrt{-K}}e^{\frac{-at}{2}}\sin\sqrt{-K}t,\ K<0$
10.	$\dfrac{1}{(p-a)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2e^{at}$
11.	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)^2}$	$\dfrac{e^{at}-[1+(a-b)t]e^{bt}}{(a-b)^2}$
12.	$\dfrac{p}{(p-a)^3}$	$(t+\dfrac{1}{2}at^2)e^{at}$