10.8 Postupnosti a rady komplexných funkcií komplexnej premennej

V predmete MA(1) sme sa zaoberali postupnosťami a radmi funkcií reálnej premennej. Ak členy funkcionálneho radu sú funkcie komplexnej premennej, hovoríme o rade funkcií komplexnej premennej. Definície bodovej konvergencie, rovnomernej konvergencie, absolútnej konvergencie, relatívnej konvergencie, divergencie, majorantného radu zavedené v reálnom obore sa zavádzajú nezmenené aj pre rady funkcií komplexnej premennej. Budeme sa zaoberať mocninovými radmi. Nech $z_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sú komplexné čísla. Rad funkcií

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

nazývame **mocninový rad so stredom v bode** z_0. Podobne ako v reálnom obore definujeme (ale aj určujeme) obor a polomer konvergencie mocninového radu s komplexnými členmi. Je zrejme, že mocninový rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konverguje aspoň v bode z_0.

Veta 10.16 *(Abelova veta) Ak mocninový rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konverguje v bode* $z_1 \neq z_0$, *potom*

- *konverguje, a to absolútne, v kruhu o polomere* $|z_1 - z_0|$ *so stredom v bode* z_0 *(t. j.* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$*),*
- *rovnomerne konverguje v ľubovoľnom uzavretom kruhu so stredom v bode* z_0 *a polomerom* $\rho < |z_1 - z_0|$.

Je zrejmé, že ak rad funkcií $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverguje v bode z_2, tak diverguje v každom bode množiny $\{z \in \boldsymbol{C} : \quad |z - z_0| > |z_2 - z_0|\}$.

10.8.1 Taylorov rad

Nech funkcia f má v bode z_0 derivácie všetkých rádov. Mocninový rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

nazývame **Taylorovým radom funkcie** f so stredom v bode z_0.

Veta 10.17 *Nech funkcia* f *je analytická na oblasti* Ω *a nech bod* $z_0 \in \Omega$ *je ľubovoľný pevný bod. Nech* $K_r = \{z \in \boldsymbol{C} : \quad |z - z_0| = r > 0\}$ *je taká kružnica so stredom v bode* z_0*, že celé jej vnútro leží v oblasti* Ω. *Potom Taylorov rad funkcie* f *v bode* z_0 *konverguje vo vnútri kružnice* K_r *pričom platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = f(z)$$

pre každý bod z *vnútra kružnice* K_r.

Nech z je ľubovoľný bod vnútra kružnice K_r a $\rho = |z - z_0| < r$. Iste existuje kružnica K_s so stredom v bode z_0 ($K_s(t) = z_0 + se^{it}, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$) o polomere s, že platí: $0 < \rho < s < r$

a kružnica K_s spolu so svojím vnútrom leží v oblasti Ω, v ktorej je funkcia f analytická. Koeficienty Taylorovho radu sú jednoznačne určené vzťahom

$$a_n = \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{K_s} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Bod $z_0 \in D_f$ sa nazýva **nulovým bodom funkcie** f, ak platí $f(z_0) = 0$. Ak funkcia f je analytická v bode $z_0 \in D_f$, tak v nejakom okolí $O(z_0)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Teda bod z_0 je nulový bod funkcie f, keď $a_0 = 0$. Bod z_0 je m-**násobný nulový bod** práve vtedy, keď

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

t. j. keď $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0, a_m \neq 0$.

Veta 10.18 *Nech funkcia* $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}$ *je analytická v nejakej oblasti* $\Omega \subset D_f$. *Bod* $z_0 \in \Omega$ *je* m*-násobný nulový bod funkcie* f *práve vtedy, keď na nejakom okolí* $O(z_0)$ *bodu* z_0 *možno funkciu* f *vyjadriť v tvare*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

kde funkcia $g : O(z_0) \to \boldsymbol{C}$ *je analytická funkcia na* $O(z_0)$, *pre ktorú platí* $g(z_0) \neq 0$.

10.8.2 Laurentov rad a singulárne body funkcie

V tejto časti sa budeme zaoberať Laurentovym radom, ktorý je určitým zovšeobecnením Taylorovho radu a umožňuje nám klasifikáciu singulárnych bodov funkcií, podobne ako sme klasifikovali nulové body analytických funkcií pomocou Taylorovho radu.

Definícia 10.16 *Nech* $z_0, a_n \in \boldsymbol{C}$ *pre všetky* $n \in \boldsymbol{Z}$ *sú dané čísla. Rad tvaru*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

nazývame **Laurentovym radom** *so stredom v bode* z_0 *a koeficientami* a_n. *Rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

sa nazýva **analytická časť** *a rad*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

hlavná časť *Laurentovho radu. Hovoríme, že Laurentov rad konverguje v bode* $z \in \boldsymbol{C}$ *práve vtedy, keď v tomto bode konvergujú obe jeho časti.*

Množinu všetkých bodov $z \in \boldsymbol{C}$, ktoré spĺňajú nerovnosti:

$$0 \leq r < |z - z_0| < R$$

alebo

$$0 \leq r < |z - z_0|,$$

kde r, R sú dané reálne čísla, nazývame **otvoreným medzikružím** so stredom v bode z_0.

Množinu všetkých bodov $z \in \boldsymbol{C}$, ktoré spĺňajú nerovnosti:

$$0 \leq r \leq |z - z_0| \leq R$$

alebo

$$0 \leq r \leq |z - z_0|,$$

kde r, R sú dané reálne čísla, nazývame **uzavretým medzikružím** so stredom v bode z_0.

Veta 10.19 *Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M = \{z \in D_f : \quad r < |z - z_0| < R\}$. Potom pre každý bod $z \in M$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

pričom pre koeficienty a_n platí vzťah

$$a_n = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

kde Γ je ľubovoľná jednoduchá uzavretá kladne orientovaná po častiach hladká krivka, ktorá leží v medzikruží M. Rad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konverguje rovnomerne na každom uzavretom medzikruží M', ktoré leží v M.

Príklad 10.7 *Nájdime Laurentov rad (rozvoj) funkcie*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

pre medzikružie $1 < |z| < 2$ so stredom v bode $z_0 = 0$.

Riešenie. Daná funkcia má dva singulárne body $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Rozvoj danej funkcie do Laurentovho radu môžeme nájsť rozkladom funkcie na parciálne zlomky a využitím znalosti o konvergencii geometrického radu. Pretože

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

nájdeme rozvoj oboch funkcií. Pre $|z| < 2$ je $q = |z|/2 < 1$, a teda

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \cdots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \ldots$$

Pre $|z| > 1$ je $q = 1/|z| < 1$, a teda

$$\frac{-1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \cdots - \frac{1}{z^n} - \ldots.$$

Sčítaním oboch radov dostaneme požadovaný výsledok.

Singulárnym bodom funkcie f komplexnej premennej nazývame každý bod, v ktorom funkcia f nie je analytická. Ak bod z_0 je singulárnym bodom funkcie f a existuje také okolie $O(z_0)$ bodu z_0, že v ňom funkcia f nemá iný singulárny bod, tak bod z_0 nazývame **izolovaným singulárnym bodom** funkcie f.

Izolovaný bod funkcie f sa nazýva:

- **odstrániteľným singulárnym bodom**, ak existuje konečná limita

  $$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$$

  (Laurentov rad funkcie f so stredom v bode z_0 obsahuje iba analytickú časť);

- **pólom (nepodstatne singulárnym bodom)**, ak

  $$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty;$$

- **podstatne singulárnym bodom**, ak

  $$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

  neexistuje (hlavná časť Laurentovho radu funkcie f so stredom v bode z_0 pre medzikružie M má nekonečný počet členov s nenulovými koeficientami).

Bod z_0 je pólom m-tého rádu (stupňa, násobnosti) funkcie f vtedy a len vtedy, keď pre hlavnú časť Laurentovho radu funkcie f pre medzikružie M platí $a_{-m} \neq 0$ a $a_{-k} = 0$ pre $k > m$.

Druh singulárneho bodu funkcie f v bode $z = \infty$ zisťujeme tak, že vyšetríme druh singulárneho bodu funkcie $g(\xi) = f(\frac{1}{\xi})$ v bode $\xi = 0$.

Veta 10.20 *Nech z_0 je izolovaným singulárnym bodom funkcie f. Bod z_0 je pólom násobnosti m funkcie f práve vtedy, keď v nejakom prstencovom okolí bodu z_0 platí*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

kde funkcia $g : O(z_0) \to \boldsymbol{C}$ je analytická v bode z_0, $g(z_0) \neq 0$.

Pól násobnosti $m = 1$ nazývame jednoduchý pól.

Príklad 10.8 *Dokážeme, že funkcia $f(z) = z^{-2}(1 - \cos z)$ má v bode $z_0 = 0$ odstrániteľný singulárny bod.*

Riešenie. Nájdime Laurentov rad danej funkcie v bode $z_0 = 0$ pre medzikružie $0 < |z|$. Platí

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2}(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots) =$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots .$$

Pretože Laurentov rad obsahuje len analytickú časť, bod $z_0 = 0$ je odstrániteľným singulárnym bodom danej funkcie.

Príklad 10.9 *Dokážeme, že funkcia $f(z) = z^{-4}(1 - \cos z)$ má v bode $z_0 = 0$ pól násobnosti $m = 2$.*

Riešenie. Nájdime Laurentov rad danej funkcie v bode $z_0 = 0$ pre medzikružie $|z| < \infty$. Platí

$$\frac{1 - \cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4}(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots) =$$

$$= \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{4!} + \frac{z^2}{6!} - \dots .$$

Pretože pre Laurentov rad danej funkcie platí $c_{-2} \neq 0$ a $c_{-n} = 0$ pre $n > 2$, bod $z_0 = 0$ je pólom násobnosti $m = 2$ danej funkcie.