10.7 Integrál funkcie komplexnej premennej

V tejto časti budeme sa zaoberať integrálom z funkcie komplexnej premennej, ukážeme jeho súvislosť s krivkovým integrálom 2. druhu reálnej funkcie.

Nech v oblasti $\Omega \subset \boldsymbol{C}$ je daná funkcia $f : \Omega \to \boldsymbol{C}$ a orientovaná krivka konečnej dĺžky $\Gamma = \{z \in \Omega : \quad z = z(t) = x(t) + i\, y(t), t \in \langle a, b\rangle\}$. Nech $D = (z_k)_{k=0}^n$, $z_k = z(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ je delenie krivky Γ a $D_t = (t_k)_{k=0}^n$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ jemu zodpovedajúce delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Nech τ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ je ľubovoľný bod z intervalu $\langle t_{k-1}, t_k\rangle$, $\xi_k = z(\tau_k)$, kde τ_k. Urobme súčet

$$S_f(D) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k.$$

Súčet $S_f(D)$ nazývame **integrálny súčet** funkcie f pre delenie D krivky Γ a pre daný výber bodov ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Podobne ako pri krivkových integráloch funkcie reálnej premennej definujeme aj ďalšie pojmy ako norma delenia, normálna postupnosť delení, integrovateľná funkcia. Ak funkcia f je integrovateľná na krivke Γ a delenie D_n je normálne, tak $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle z_k$ sa nazýva **integrál funkcie** f po krivke Γ a označujeme ho $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$.

Veta 10.8 *Nech funkcia f je spojitá na oblasti Ω. Nech $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ a nech Γ je po častiach hladká (orientovaná) krivka. Potom existuje integrál funkcie f na krivke Γ a platí*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int\limits_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

Teda výpočet integrálu funkcie komplexnej premennej po krivke v Gaussovej rovine môžeme nahradiť výpočtom dvoch krivkových integrálov druhého druhu funkcie reálnej premennej. Špeciálnym prípadom je integrál komplexnej funkcie reálnej premennej $f(z) = f(t) = u(t) + i\, v(t)$. Platí

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)dt = \int\limits_{a}^{b} u(t)dt + i \int\limits_{a}^{b} v(t)dt.$$

Pre výpočet $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$ platí

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)]dt +$$

$$+i \int\limits_{a}^{b} [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]dt.$$

Integrál funkcie komplexnej premennej má podobné vlastnosti ako krivkový integrál druhého druhu v reálnom obore.

Nech $\Gamma : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{C}$ je po častiach hladká krivka. Nech $f_k : \boldsymbol{C} \supset D_{f_k} \to \boldsymbol{C}$, sú integrovateľné funkcie na krivke Γ a $c_k \in \boldsymbol{C}$, $k = 1, 2$ sú dané čísla. Potom platí:

- $\int\limits_{\Gamma} (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))dz = c_1 \int\limits_{\Gamma} f_1(z)dz + c_2 \int\limits_{\Gamma} f_2(z)dz,$

- funkcia f je integrovateľná na krivke $\bar{\Gamma}$ (opačne orientovanej) a platí $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\bar{\Gamma}} f(z)dz$,
- nech $\Gamma = \Gamma_1 \bigoplus \Gamma_2$, kde Γ_1, Γ_2 sú po častiach hladké krivky a funkcia f je integrovateľná na Γ_1, Γ_2. Potom platí $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz$,
- $|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz| \leq \int\limits_{\Gamma} |f(z)|ds$.

Príklad 10.4 *Vypočítajme: a)* $\int\limits_{\gamma} zdz$, *kde krivka* γ *je úsečka* $z(t) = 3t + 4t\,i$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, *b)* $\int\limits_{\Gamma} (z-1)^{-1}dz$, *kde* Γ *je kladne orientovaná časť kružnice* $z(t) = 1 + Re^{it}$, $t \in \langle 0, \pi/2\rangle$, $R > 0$.

Riešenie. a) Na výpočet daného integrálu použijeme vzťah

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt = \int\limits_{0}^{1} (3t + 4i\,t)(3 + 4\,i)dt = (3 + 4\,i)^2/2.$$

b) Grafom krivky Γ je časť kružnice so stredom v bode $z_0 = 0$ a polomerom R so začiatočným bodom R a koncovým bodom $i\,R$. Podobne ako v a) platí

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)dt = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{i\,Re^{i\,t}}{Re^{i\,t}}dt = i\,\frac{\pi}{2}.$$

Definícia 10.15 *Nech* $\Omega \subset \boldsymbol{C}$ *je oblasť a nech sú dané funkcie* $f : \Omega \to \boldsymbol{C}$, $F : \Omega \to \boldsymbol{C}$ *a nech funkcia* F *je analytická na oblasti* Ω. *Hovoríme, že funkcia* F **je primitívna funkcia** *k funkcii* f *na oblasti* Ω *práve vtedy, keď pre všetky* $z \in \Omega$ *platí* $F'(z) = f(z)$.

Veta 10.9 *Nech funkcia* $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}$ *je spojitá a má v oblasti* $\Omega \subset D_f$ *primitívnu funkciu* F. *Nech krivka* Γ *leží v oblasti* Ω *a je po častiach hladká so začiatočným bodom* $z_1 \in \Omega$ *a koncovým bodom* $z_2 \in \Omega$. *Potom platí* $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$, *t. j. hodnota integrálu nezávisí od integračnej cesty.*

V nasledujúcej časti sa budeme zaoberať integrálmi z analytických funkcií po uzavretých krivkách, kde je podstatný rozdiel medzi analýzou v komplexnom a reálnom obore.

Veta 10.10 *(Cauchyho základná veta) Nech* $\Omega \subset \boldsymbol{C}$ *je jednoducho súvislá oblasť a nech funkcia* $f : \Omega \to \boldsymbol{C}$ *je analytická na* Ω. *Nech* $\Gamma \subset \Omega$ *je ľubovoľná po častiach hladká uzavretá krivka. Potom platí*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Veta 10.11 *(Cauchyho veta pre viacnásobne súvislú oblasť) Nech* $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ *sú jednoduché uzavreté kladne orientované krivky a nech* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ *ležia vo vnútri krivky* Γ *tak, že žiadne dve ani ich vnútra nemajú spoločné body. Nech krivka* Γ *a jej vnútro, bez vnútorných bodov kriviek* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ *ležia v oblasti* Ω. *Nech funkcia* f *je analytická na oblasti* Ω. *Potom platí*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + \cdots + \oint\limits_{\Gamma_n} f(z)dz.$$

Pomocou Cauchyho vety sa dá ukázať, že za určitých predpokladov sa dajú hodnoty analytickej funkcie vo vnútorných bodoch oblasti určiť na základe hodnôt tejto funkcie na hranici oblasti.

Veta 10.12 *(Cauchyho integrálna formula) Nech na oblasti Ω je funkcia f analytická. Nech Γ je jednoduchá uzavretá kladne orientovaná krivka, ktorá leží so svojím vnútrom A v oblasti Ω. Nech bod z leží vo vnútri krivky Γ ($z \in A$). Potom platí:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Príklad 10.5 *Vypočítajme*

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz,$$

kde γ je: a) kladne orientovaná kružnica $|z-1| = 1$, b) kladne orientovaná kružnica $|z-i| = 1$, c) kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$.

Riešenie. Daný integrál upravíme a použijeme Cauchyho integrálnu vetu v a) časti a Cauchyho integrálnu formulu v časti b), c). Dostávame

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = 0,$$

pretože podintegrálna funkcia je analytická na nejakej otvorenej oblasti Ω, pričom kružnica $|z-1| = 1$ spolu so svojím vnútrom leží v oblasti Ω.
b) Daný integrál upravíme tak, aby funkcia v čitateli bola analytická vo vnútri kružnice $|z-i| = 1$ a podľa Cauchyho integrálnej formuly necháme v menovateli $z - z_0$, $z_0 = i$, t. j. bod z_0 je bod, v ktorom podintegrálna funkcia nie je analytická

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz = \oint\limits_{\gamma} \frac{(z+i)^{-1}}{z-i} dz = 2\pi\, i \left[\frac{1}{z+i}\right]_{z=i} = 2\pi\, i \frac{1}{2\, i} = \pi.$$

c) Podintegrálna funkcia teraz nie je analytická vo vnútorných bodoch kružnice $|z| = 2$, a to v bodoch $i, -i$. Použijeme Cauchyho vetu pre viacnásobne súvislú oblasť a potom v bodoch $i, -i$ Cauchyho integrálnu formulu

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz =$$

$$= \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{(z+i)^{-1}}{z-i} dz + \oint\limits_{|z+i|=1} \frac{(z-i)^{-1}}{z+i} dz = 2\pi\, i \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{-2i}\right) = 0.$$

Veta 10.13 *(Zovšeobecnená Cauchyho integrálna formula) Nech na oblasti Ω je funkcia f analytická. Nech Γ je jednoduchá uzavretá kladne orientovaná, po častiach hladká krivka, ktorá leží so svojím vnútrom A v oblasti Ω. Potom funkcia f má v každom bode $z \in A$ deriváciu ľubovoľného rádu a platí:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Príklad 10.6 *Vypočítajme*
$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz,$$
ak γ je kladne orientovaná kružnica: a)$|z-1|=1$, b) $|z+1|=0.5$, c) $|z|=2$.

Riešenie. Budeme postupovať podobne ako v predchádzajúcom príklade s tým, že podintegrálnu funkciu prispôsobíme zovšeobecnenej Cauchyho integrálnej formule.
a)
$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^{-3}}{(z-1)^3}dz =$$
$$= \frac{2\pi\, i}{2!}[(z+1)^{-3}]''_{z=1} = \pi\, i \left[\frac{12}{(z+1)^5}\right]_{z=1} = \frac{12\pi\, i}{2^5} = \frac{3\pi\, i}{8}.$$
b) Postupujeme podobne ako v prípade a)
$$\oint_{|z+1|=0.5} \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz = \oint_{|z+1|=0.5} \frac{(z-1)^{-3}}{(z+1)^3}dz =$$
$$= \frac{2\pi\, i}{2!}\left[(z-1)^{-3}\right]''_{z=-1} = \pi\, i \left[\frac{12}{(z-1)^5}\right]_{z=-1} = \frac{12\pi\, i}{-2^5} = -\frac{3\pi\, i}{8}.$$
c)
$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz =$$
$$= \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz + \oint_{|z+1|=0.5} \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz = 0.$$
Nasledujúca veta je v istom zmysle obrátenou vetou ku Cauchyho základnej vete.

Veta 10.14 *(Morerova veta) Nech funkcia f je konečná a spojitá v jednoducho súvislej oblasti $\Omega \subset D_f \subset \boldsymbol{C}$ a nech $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$, kde Γ je ľubovoľná jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká orientovaná krivka, ktorá leží celá v oblasti Ω. Potom je funkcia f analytická na Ω.*

Veta 10.15 *(Liouvilleova veta) Nech funkcia $f : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ je analytická a ohraničená na $\boldsymbol{C}$. Potom funkcia f je na $\boldsymbol{C}$ konštantná.*