11.1 Definícia Laplaceovej transformácie

V tejto časti sa budeme zaoberať myšlienkou zjednodušenia riešenia niektorých úloh (napríklad diferenciálnych rovníc). Každej funkcii $f(t)$ z určitej triedy funkcií, budeme ju nazývať vzorom (originálom, predmetom), určíme na základe určitých pravidiel jej obraz $F(p)$, pričom zložitejším operáciám v množine vzorov $\{f(t)\}$ by mali odpovedať jednoduchšie operácie v množine obrazov $\{F(p)\}$. Napríklad pri riešení diferenciálnych rovníc budeme postupovať takto:

1. Rovnicu, ktorú máme riešiť v oblasti originálov, pomocou určitých pravidiel, prepíšeme (pretransformujeme) do rovnice v oblasti obrazov.
2. Riešime získanú rovnicu v oblasti obrazov (nájdeme obraz riešenia pôvodnej úlohy).
3. Spätnou transformáciou určíme originál.

Definícia 11.1 *Komplexnú funkciu reálnej premennej $f(t)$ budeme nazývať* **predmetom** *(***originálom***,* **vzorom***) práve vtedy, keď splĺňa podmienky:*

1. *$f(t) = 0$ pre $t < 0$.*
2. *$f(t)$ je na intervale $\langle 0, \infty)$ po častiach spojitá funkcia, t. j. na každom konečnom intervale $\langle a, b\rangle$ má konečný počet bodov nespojitosti prvého druhu.*
3. *Existujú také reálne čísla $M > 0$ a α, že pre ľubovoľné $t \in \langle 0, \infty)$ platí $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.*

Číslo $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \boldsymbol{R}: \quad |f(t)| \leq Me^{\alpha t}\}$ nazývame **index rastu predmetu** $f(t)$.

Dôležitým predmetom je jednotková (Heavisidova) funkcia

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Ak bude v ďalšom texte reč o predmetoch $\sin t$, $\cos t$, e^t, atď., budeme uvažovať funkcie $\eta(t)\cos t$, $\eta(t)\sin t$, $\eta(t)e^t$, atď.

Nech $f(t)$ je komplexná funkcia reálnej premennej $t \in (-\infty, \infty)$ a nech $p = \sigma + i\,s \in \boldsymbol{C}$ je komplexná premenná. Nech nevlastný integrál

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{1}$$

existuje a má konečnú hodnotu aspoň pre jeden bod $p \in \boldsymbol{C}$. Integrál (1) nazývame **Laplaceov integrál funkcie** $f(t)$.

Definícia 11.2 *Nech je daná komplexná funkcia $f(t)$ reálnej premennej $t \in (-\infty, \infty)$. Nech D je množina tých hodnôt parametra $p \in \boldsymbol{C}$, pre ktoré je konvergentný Laplaceov integrál. Komplexnú funkciu $F(p)$ určenú predpisom*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \quad p \in D, \tag{2}$$

nazývame **Laplaceov obraz funkcie** *$f(t)$. Transformáciu, ktorá priraďuje funkcii $f(t)$ jej Laplaceov obraz $F(p)$, nazývame* **Laplaceova transformácia** *(LT). Vzťah medzi funkciou $f(t)$ a jej Laplaceovým obrazom $F(p)$ budeme označovať takto:*

$$f(t) \div F(p) \quad \text{alebo} \quad F(p) \div f(t).$$

Budeme používať tiež označenie $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$.

V praxi sa používa tiež Laplaceova-Carsonova (Heavisidova) transformácia daná vzťahom

$$F_k(p) = p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Veta 11.1 *(veta o existencii Laplaceovho obrazu). Ak $f(t)$ je predmet s indexom rastu α_0, tak Laplaceov integrál (1)konverguje v polrovine $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ a definuje obraz*

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

ktorý je v tejto polrovine analytickou funkciou.

V ďalšom texte budeme pod Laplaceovým obrazom predmetu $f(t)$ rozumieť funkciu $F(p)$ pre tie hodnoty p, kde je funkcia $F(p)$ analytická.

Ak funkcia $F(p)$ je obrazom niektorého predmetu $f(t)$, tak

$$\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} F(p) = 0.$$