5.3 Postup pri riešení niektorých diferenciálnych rovníc prvého rádu

5.3.1 Diferenciálna rovnica $y' = f(x)$

Je to najjednoduchšia diferenciálna rovnica typu $y' = f(x, y)$.

Veta 5.1 *Nech $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ je spojitá funkcia. Potom každým bodom $[x_0, y_0]$ oblasti $P = \{[x, y] : x \in (a, b), y \in \mathbf{R}\} = (a, b) \times \mathbf{R}$ prechádza práve jedno riešenie $y : (a, b) \to \mathbf{R}$ diferenciálnej rovnice $y' = f(x)$. Toto riešenie môžeme zapísať v tvare*

$$y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

5.3.2 Diferenciálna rovnica $y' = f(x)g(y)$

Rovnica

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

sa nazýva rovnica so separovateľnými premennými a metóda, ktorou ju budeme riešiť, sa nazýva **separácia premenných**.

Pri označení derivácie $y' = dy/dx$ môžeme danú rovnicu zapísať v tvare

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Budeme predpokladať, že funkcie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ sú spojité a pre každé $u \in (c, d)$ je $g(u) \neq 0$. Ak y je riešením danej diferenciálnej rovnice na intervale (a, b), tak $y'(x) = f(x)g[y(x)]$ pre každé $x \in (a, b)$ a teda

$$\frac{y'(x)}{g[y(x)]} = f(x).$$

Túto rovnosť môžeme integrovať v hraniciach od x_0 po x pre každé $x \in (a, b)$. Dostávame

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g[y(t)]}dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Použitím substitučnej metódy dostaneme

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Ak $F : (a, b) \to \mathbf{R}$, $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f$ a $G : (c, d) \to \mathbf{R}$, $G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} 1/g$, tak $G[y(x)] = F(x)$ pre každé $x \in (a, b)$. Túto rovnicu vieme jednoznačne riešiť vzhľadom na y, pretože $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$ na intervale (c, d) a teda funkcia G je rýdzomonotónna. Ak G^{-1} je inverzná funkcia k funkcii G, tak $y(x) = G^{-1}[F(x)]$.

Poznámka 5.1 *Ak F, resp. G je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii f, resp. k funkcii $1/g$, tak $G(y) = F(x) + C$, kde C je ľubovoľná konštanta. Vzťahom*

$$y(x) = G^{-1}[F(x) + C]$$

sú určené všetky riešenia rovnice $y' = f(x)g(y)$, kde je zdôraznená ľubovoľnosť konštanty C bez určenia začiatočných podmienok. Takéto riešenie sa často nazýva všeobecným riešením danej diferenciálnej rovnice. Partikulárne riešenie, ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke $y(x_0) = y_0$ dostaneme zo všeobecného riešenia, kde C je riešením rovnice $y_0 = G^{-1}[F(x_0) + C]$.

5.3.3 Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu

Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu je rovnica $y' = a(x)y+b(x)$. Budeme predpokladať, že funkcie a, b sú spojité funkcie na intervale I.

Homogénna rovnica

Keď $b(x) = 0$ pre každé $x \in I$ hovoríme o lineárnej diferenciálnej rovnici bez pravej strany alebo o homogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici, v opačnom prípade hovoríme o diferenciálnej rovnici s pravou stranou alebo o nehomogénnej lineárnej diferenciálnej rovnici prvého rádu. Tento názov vznikol zo zápisu rovnice v tvare $y' - a(x)y = b(x)$.

Homogénna rovnica $y' = a(x)y$ má riešenie $y = 0$ pre každé $x \in I$. Pomocou metódy separácie premenných budeme hľadať len tie riešenia $y = y(x)$, pre ktoré platí $y(x) \neq 0$, $x \in I$. Pre $y \neq 0$ dostaneme

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx, \quad \ln|y| = \int a(x)dx + c,$$
$$|y| = e^{\int a(x)dx+c} = e^{\int a(x)dx}e^c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta. Funkcia y je na intervale I spojitá a teda na tomto intervale je buď kladná alebo záporná. Pre $y > 0$ je $y = e^c e^{\int a(x)dx}$ a pre $y < 0$ je $y = -e^c e^{\int a(x)dx}$.

Teda všetky riešenia lineárnej homogénnej diferenciálnej rovnice (všeobecné riešenie) môžeme zapísať v tvare

$$y = Ce^{\int a(x)dx}, \quad C \in \mathbf{R}, \quad x \in I, \tag{2}$$

pretože riešenie $y = 0$ dostaneme pre $C = 0$.

Partikulárne riešenie, ktoré vyhovuje začiatočnej podmienke $y(x_0) = y_0$ dostaneme zo všeobecného riešenia v tvare

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{3}$$

Nehomogénna rovnica

Riešenie nehomogénnej rovnice nájdeme pomocou **metódy variácie konštánt**. Riešenie budeme hľadať v tvare $y = C(x)y_1$, kde $y_1 = e^{\int a(x)dx}$ je riešenie homogénnej rovnice a $C(x)$ je nejaká diferencovateľná funkcia na I. Potom pre každé $x \in I$ je $y'(x) = C'(x)y_1(x)+C(x)y_1'(x)$ a pretože y je riešenie nehomogénnej rovnice, tak

$$C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x) = a(x)C(x)y_1(x) + b(x).$$

Keďže y_1 je riešenie rovnice $y' = a(x)y$, tak pre každé $x \in I$ platí $y_1'(x) = a(x)y_1(x)$. Potom z predchadzajúcich rovníc dostávame

$$C'(x)y_1(x) + C(x)a(x)y_1(x) = a(x)C(x)y_1(x) + b(x).$$

Po úprave

$$C'(x) = y_1^{-1}b(x).$$

Vzhľadom na spojitosť funkcií y_1, a je

$$C(x) = \int y_1^{-1}b(x)dx + k = \int e^{-\int a(x)dx}b(x)dx + k,$$

kde k je ľubovoľná konštanta. To znamená, že všeobecné riešenie nehomogénnej rovnice má tvar

$$y = \left(\int e^{-\int a(x)dx}b(x)dx + k\right)e^{\int a(x)dx}.$$

Pre partikulárne riešenie vyhovujúce začiatočnej podmienke $y(x_0) = y_0$ dostávame

$$y = \left(\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt + y_0\right) e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{4}$$