7.4 Trojný integrál

Úplne analogická je definícia integrálnych súčtov a integrálu, ako aj integrovateľnosti funkcie vo viacrozmernom priestore.

Nech $f : \boldsymbol{R}^3 \supset A \to \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a nech $\omega \subset A$ je ohraničená uzavretá oblasť, ktorá je zjednotením konečného počtu elementárnych oblastí. Rozdelíme oblasť ω na n častí tak, aby $\omega = \cup_{i=1}^{n} \omega_i$ a dve rôzne oblasti ω_i, ω_j nemali spoločné vnútorné body. Nech bod P_i je ľubovoľným bodom oblasti ω_i. Nech $f(P_i)$ je hodnota funkcie f v bode P_i. Sumu

$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f(Pi)\triangle\omega_i,$$

nazývame **integrálnym súčtom pre trojný integrál** prislúchajúcim danému deleniu D_n a danému výberu bodov P_i.

Ak delenie je také, že oblasti σ_i sú trojrozmerné intervaly so stranami $\triangle x_i$, $\triangle y_i$, $\triangle z_i$, tak

$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f(Pi)\triangle x_i \triangle y_i \triangle z_i.$$

Nech pre $n \in \boldsymbol{N}$ je D_n delenie oblasti ω na malé oblasti ω_i také, že pre $n \to \infty$ priemer $d(\omega_i)$ oblasti ω_i konverguje k nule.

Takúto postupnosť delení nazývame **normálnou postupnosťou delení**.

Nech J je trojrozmerný interval. Množinu intervalov $\langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle\times$ $\times\langle z_{k-1}, y_k\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, s$ nazývame delením intervalu J.

Definícia 7.2 *Číslo I nazývame trojným integrálom z funkcie f na oblasti ω, ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ oblasti ω a pre ľubovoľné výbery bodov v súčtoch $S(f, D_n)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n) = I$.*

Integrál funkcie f na oblasti ω označujeme znakom

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z) d\omega \quad \text{alebo} \quad \iiint\limits_{\omega} f(x, y, z) dxdydz.$$

Funkcia f je integrovateľná na množine ω, ak funkcia $F_\omega = \chi_\omega f$ je integrovateľná na istom intervale J, ktorý obsahuje množinu ω a platí

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{J} F_\omega(x, y, z) dxdydz.$$

Nech ω je ohraničená množina. Ak existuje $\iiint\limits_{\omega} dxdydz$, nazývame množinu ω merateľnou. Jej objemom nazývame číslo

$$m(\omega) = \iiint\limits_{\omega} dxdydz.$$

Poznámka 7.3 *Pre trojný integrál platia podobné vety ako pre dvojný integrál.*