9.1 Jednoduchá hladká krivka. Orientované krivky

Definícia 9.1 *Množinu bodov $P \in \boldsymbol{R}^3$ nazývame* **jednoduchá hladká krivka** C*, ak súradnice bodu $P(x, y, z)$ možno určiť pomocou funkcií $\varphi, \psi, \chi : \langle\alpha, \beta\rangle \to \boldsymbol{R}$ a platí*

1. *$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, kde $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ (tieto rovnice nazývame parametrickými rovnicami jednoduchej hladkej krivky C).*
2. *Funkcie φ, ψ, χ majú spojité derivácie pre $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$.*
3. *$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) > 0$ pre $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$.*
4. *Každým dvom rôznym hodnotám parametra $t \in \langle\alpha, \beta)$ odpovedajú dva rôzne body, t. j. $P(t_1) \neq P(t_2)$ pre $t_1 \neq t_2 \in \langle\alpha, \beta\rangle$.*

Ak podmienku (4) definície 9.1 nahradíme podmienkou:

$4'$. *Každým dvom rôznym hodnotám parametra $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ odpovedajú dva rôzne body, t. j. $P(t_1) \neq P(t_2)$ pre $t_1 \neq t_2 \in \langle\alpha, \beta)$ a $P(\alpha) = P(\beta)$, tak hovoríme o* **jednoduchej uzavretej hladkej krivke***.*

Parametrické vyjadrenie krivky C môžeme vyjadriť tiež pomocou vektorovej funkcie $\boldsymbol{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Túto funkciu spravidla názorne interpretujeme tak, že t je čas a $\boldsymbol{r}(t)$ je poloha pohybujúceho sa bodu. Bod sa môže pohybovať po krivke C dvoma navzájom opačnými smermi. Skutočnosť, že bod P_1 je pred bodom P_2, krátko zapíšeme takto: $P_1 \prec P_2$. Oblúk C je orientovaný súhlasne [nesúhlasne] s parametrickým vyjadrením $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, ak pre ľubovoľné body P_1, P_2 oblúka C, pre ktoré je $t_1 < t_2$ [$t_1 < t_2$], je $P_1 \prec P_2$ [$P_2 \prec P_1$].

Ak je krivka C orientovaná súhlasne [nesúhlasne] s parametrickým vyjadrením $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, tak bod $\boldsymbol{r}(\alpha)$ [$\boldsymbol{r}(\beta)$] je jej prvým a bod $\boldsymbol{r}(\beta)$ [$\boldsymbol{r}(\alpha)$] jej posledným bodom.

Pre určenie orientácie uzavretých kriviek potrebujeme ľubovoľné tri rôzne body $P_1 = \boldsymbol{r}(t_1), P_2 = \boldsymbol{r}(t_2), P_3 = \boldsymbol{r}(t_3)$. Krivku C nazveme **cyklicky orientovanou súhlasne s parametrickým vyjadrením**, ak trojicu bodov (P_1, P_2, P_3) považujeme za usporiadanú v zmysle orientácie vtedy a len vtedy, keď nastane jedna z týchto možností:

$$t_1 < t_2 < t_3, \quad t_3 < t_1 < t_2, \quad t_2 < t_3 < t_1.$$

Uzavreté krivky cyklicky orientované súhlasne alebo nesúhlasne s parametrickým vyjadrením nazývame **cyklicky orientované**.

Ak výslovne nebudeme predpokladať iné, tak pod orientovanými krivkami budeme rozumieť krivky orientované súhlasne, resp. nesúhlasne s parametrickým vyjadrením ako aj cyklicky orientované krivky. Je zrejmé, že na to, aby sme určili orientáciu oblúka, stačí udať, ktorý z koncových bodov je prvý a ktorý posledný. Podobne na to, aby sme určili cyklickú orientáciu uzavretej krivky, stačí udať jednu usporiadanú trojicu jej bodov.

Nech C je orientovaný oblúk (cyklicky orientovaná krivka). Nech na krivke C sú dané body $P_0, P_1, \ldots, P_m$ tak, že $P_0 \prec P_1 \prec \cdots \prec P_m$, pričom P_0 a P_m sú koncové body krivky C ($P_0 = P_m$ a (P_{i-2}, P_{i-1}, P_i) sú usporiadané trojice bodov pre $i = 2, 3, \ldots, m$). Potom hovoríme, že na krivke C je dané **delenie** D **krivky** C, ktoré pozostáva z čiastočných kriviek $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Je zrejmé, že ak C je orientovaná krivka, tak každá jej čiastočná krivka (oblúk) je tiež orientovanou krivkou.

Orientovanú krivku C nazývame **po častiach hladkou**, ak existuje také jej delenie, že všetky čiastočné krivky $P_{i-1}P_i$ tohto delenia sú hladké oblúky. Normou delenia D krivky C rozumieme číslo

$$\| D \| = \max \{d(P_{i-1}, P_i), \quad i = 1, 2, \ldots, p\}$$

Postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ delení krivky C nazývame **normálnou**, ak $\lim\limits_{n\to\infty} \| D_n \| = 0$.

Krivkový integrál prvého druhu

Nech $f(P)$ je ohraničená reálna funkcia definovaná v každom bode krivky C. Nech D je delenie krivky C, dané deliacimi bodmi $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Nech $K_i \in P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ a nech dĺžka oblúka $P_{i-1}P_i$ je $\triangle s_i = |P_i - P_{i-1}|$. Potom číslo

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{m} f(K_i)|P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{m} f(K_i)\triangle s_i$$

nazývame **integrálnym súčtom funkcie** $f(P)$ **pre delenie** D **krivky** C **a danú voľbu bodov** K_i. Tento integrálny súčet sa nazýva **integrálny súčet prvého druhu.**

Definícia 9.2 *Číslo I nazývame* **integrálom z funkcie** f **po krivke** C*, ak pre každú normálnu postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ delení krivky C a pre ľubovoľné výbery bodov K_i je $I = \lim\limits_{n\to\infty} S(f, D_n)$. Tento integrál nazývame* **krivkovým integrálom prvého druhu** *po krivke C a označujeme ho znakom $\int\limits_C f(P)ds$.*

Krivkový integrál druhého druhu

Nech pôsobením sily, ktorej hodnota v ľubovoľnom bode krivky C je daná vektorom $\boldsymbol{f}(P)$, sa hmotný bod pohybuje po krivke C. Našou úlohou je zistiť, akú prácu vykoná sila pri premiestnení bodu P po celej krivke C. Prácu, ktorú vykoná sila $\boldsymbol{f}(P)$ po krivke C, môžeme približne vypočítať takto: Nech D je delenie krivky C dané deliacimi bodmi $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Na každom čiastočnom oblúku $P_{i-1}P_i$ si zvolíme ľubovoľný bod K_i. Ak je norma delenia dosť malá, môžeme oblúk $P_{i-1}P_i$ nahradiť úsečkou $P_{i-1}P_i$. Pretože $\boldsymbol{f}(P)$ je spojitou funkciou, je na oblúku $P_{i-1}P_i$ sila $\boldsymbol{f}(P)$ približne rovná sile $\boldsymbol{f}(K_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ a prácu sily $\boldsymbol{f}(P)$, pôsobiacej po krivke C môžeme približne vyjadriť ako

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{f}(K_i) \cdot (P_i - P_{i-1}),$$

kde $\boldsymbol{f}(K_i) \cdot (P_i - P_{i-1})$ je skalárny súčin vektora $\boldsymbol{f}(K_i)$ a vektora $P_i - P_{i-1}$ a jeho hodnota je práca, ktorú vykoná sila $\boldsymbol{f}(K_i)$ pri premiestnení hmotného bodu z bodu P_{i-1} do bodu P_i.

Nech C je ľubovoľná orientovaná krivka. Nech $\boldsymbol{f}(P)$ je ohraničená vektorová funkcia definovaná v každom bode krivky C.Nech D je delenie krivky C dané deliacimi bodmi $P_0, P_1, \ldots, P_m$. Nech $K_i \in P_{i-1}P_i$. Číslo

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{f}(K_i) \cdot (P_i - P_{i-1})$$

nazývame **integrálnym súčtom funkcie** $\boldsymbol{f}$ pre delenie D a pre daný výber bodov K_i, pričom $P_i - P_{i-1} = \triangle x_i \boldsymbol{i} + \triangle y_i \boldsymbol{j} + \triangle z_i \boldsymbol{k}$.

Číslo I nazývame **integrálom funkcie** $\boldsymbol{f}$ **po krivke** C, ak pre každú normálnu postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ delení krivky C a pre ľubovoľné výbery bodov K_i je $I = \lim\limits_{n\to\infty} S(\boldsymbol{f}, D_n)$. Tento integrál nazývame **krivkovým integrálom druhého druhu** po krivke C a označujeme ho znakom $\int\limits_C \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}$.

Poznámka 9.1 *Ak je v rovine zvolený pravouhlý súradnicový systém, v ktorom je* $\boldsymbol{f}(P) = p(x,y)\boldsymbol{i} + q(x,y)\boldsymbol{j}$, $\mathbf{d}\boldsymbol{s} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$, *potom krivkový integrál druhého druhu označujeme tiež znakom*

$$\int_C p(x,y)dx + q(x,y)dy.$$

Poznámka 9.2 *Ak je v priestore zvolený pravouhlý súradnicový systém, v ktorom je* $\boldsymbol{f}(P) = p(x,y,z)\boldsymbol{i} + q(x,y,z)\boldsymbol{j} + r(x,y,z)\boldsymbol{k}$, $\mathbf{d}\boldsymbol{s} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$, *potom krivkový integrál druhého druhu označujeme tiež znakom*

$$\int_C p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz.$$

Ak existuje integrál z funkcie f ($\boldsymbol{f}$) po krivke C hovoríme, že funkcia f ($\boldsymbol{f}$) je integrovateľná na krivke C.

Veta 9.1 *Nech C je po častiach hladká orientovaná krivka, ktorej parametrické vyjadrenie je $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$. Nech f je reálna funkcia definovaná na krivke C. Potom*

$$\int_C f(P)ds = \int_\alpha^\beta f(O + \boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|dt,$$

pričom krivkový integrál vľavo existuje vtedy a len vtedy, keď existuje obyčajný (Riemannov) integrál vpravo.

Veta 9.2 *Nech C je po častiach hladká orientovaná krivka, ktorej parametrické vyjadrenie je $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in \langle\alpha,\beta\rangle$. Nech $\boldsymbol{f}$ je vektorová funkcia definovaná na krivke C. Potom*

$$\int_C \boldsymbol{f}(P)\cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \pm\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}(O + \boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)dt,$$

pričom krivkový integrál vľavo existuje vtedy a len vtedy, keď existuje obyčajný (Riemannov) integrál vpravo. Ak krivka C je orientovaná súhlasne s daným parametrickým vyjadrením, platí znamienko $+$. Ak krivka C je orientovaná nesúhlasne s daným parametrickým vyjadrením, platí znamienko $-$.

Poznámka 9.3 • *Ak v danom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine je $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j}$, potom*

$$\int_C f(P)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt, \tag{1}$$

$$\int_C \boldsymbol{f}(P)\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int_\alpha^\beta p(x,y)dx + q(x,y)dy =$$

$$= \int_\alpha^\beta \{p[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt. \tag{2}$$

- *Ak v danom pravouhlom súradnicovom systéme v priestore je* $\boldsymbol{r}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{i} + \psi(t)\boldsymbol{j} + \chi(t)\boldsymbol{k}$*, potom*

$$\int\limits_C f(P)ds = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}dt, \tag{3}$$

$$\int\limits_C \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_\alpha^\beta p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \{p[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\varphi'(t) + q[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\psi'(t) + r[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]\chi'(t)\}dt. \tag{4}$$

Uvedieme niektoré základné vlastnosti krivkových integrálov.

- Krivkový integrál prvého, resp. druhého druhu po orientovanej a po častiach hladkej krivke C pre spojitú reálnu funkciu f, resp. vektorovú funkciu $\boldsymbol{f}$, existuje.

- Nech C je orientovaná krivka a C^* je krivka, ktorá vznikne z nej zmenou orientácie. Nech existuje integrál z funkcie f, resp. z funkcie $\boldsymbol{f}$ po krivke C. Potom existuje aj integrál z funkcie f, resp. $\boldsymbol{f}$ po krivke C^* a platí

$$\int\limits_{C^*} f(P)ds = \int\limits_C f(P)ds,$$

$$\int\limits_{C^*} \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = -\int\limits_C \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}.$$

- Nech existujú krivkové integrály z funkcie f a g, resp. z funkcie $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{g}$, po krivke C a nech c_1, c_2 sú čísla. Potom existuje aj integrál z funkcie $c_1 f + c_2 g$, resp. integrál z funkcie $c_1\boldsymbol{f} + c_2\boldsymbol{g}$ po krivke C a platí:

$$\int\limits_C [c_1 f(P) + c_2 g(P)]ds = c_1 \int\limits_C f(P)ds + c_2 \int\limits_C g(P)ds,$$

$$\int\limits_C [c_1\boldsymbol{f}(P) + c_2\boldsymbol{g}(P)] \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = c_1 \int\limits_C \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} + c_2 \int\limits_C \boldsymbol{g}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}.$$

- Nech orientované krivky C_1 a C_2 tvoria delenie krivky C. Ak existuje integrál funkcie f, resp. funkcie $\boldsymbol{f}$, po krivkách C_1, C_2, potom existuje aj integrál z funkcie f, resp. funkcie $\boldsymbol{f}$ po krivke C a platí:

$$\int\limits_C f(P)ds = \int\limits_{C_1} f(P)ds + \int\limits_{C_2} f(P)ds,$$

$$\int\limits_C \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_{C_1} \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s} + \int\limits_{C_2} \boldsymbol{f}(P) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{s}.$$

Príklad 9.1 *Vypočítajte* $\int\limits_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, *kde* l *je úsečka* AB, $A=(0;0)$, $B=(1;2)$.

Riešenie. Rovnica priamky AB je $y=2x$. Pre danú krivku l je $ds=\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}dx$. Teda

$$\int\limits_l \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}} =$$

$$= \sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}} = [\ln|x+\sqrt{x^2+4/5}|]_0^1 = \ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

Príklad 9.2 *Vypočítajte* $\int\limits_l y^2 ds$, *kde* l *je časť cykloidy* $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in\langle 0;2\pi\rangle$.

Riešenie. Pre výpočet použijeme vzťah (5.1). Teda

$$\int\limits_l y^2 ds = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{[a(1-\cos t)]^2+[a\sin t]^2}dt =$$

$$= \sqrt{2}a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^{5/2}dt = \sqrt{2}a^3 4\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^5(t/2)dt = \cdots = 256a^3/15.$$

Príklad 9.3 *Vypočítajte* $\int\limits_l (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, *kde* l *je časť paraboly* $y=x^2$, *od bodu* $A=(-1;1)$ *do bodu* $B=(1;1)$.

Riešenie. Pre výpočet použijeme vzťah (5.2), kde $x=\varphi(t)=t$, $y=\psi(t)=t^2$. Teda

$$\int\limits_l (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\{(t^2-2tt^2)+((t^2)^2-2tt^2)2t\}dt = \cdots = -14/15.$$