9.4 Test 9

1. T9-1 (4b) Ak v danom pravouhlom súradnicovom systéme v rovine je $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j, \mathbf{f}(P) = p(x,y,z)\mathbf{i} + q(x,y,z)\mathbf{j}$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, tak:

   (a) $\int\limits_C f(P)ds = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]dt$,

   (b) $\int\limits_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathbf{ds} = \int\limits_\alpha^\beta p(x,y)dx + q(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \{p[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt$.

   (c) $\int\limits_C f(P)ds = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$,

   (d) $\int\limits_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathbf{ds} = \int\limits_\alpha^\beta p(x,y)dx + q(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \{p[\varphi(t), \psi(t)] + q[\varphi(t), \psi(t)]\}dt$.

2. T9-2 (2b) Nech C je orientovaná krivka a C^* je krivka, ktorá vznikne z nej zmenou orientácie. Nech existuje integrál z funkcie f, resp. z funkcie $\mathbf{f}$ po krivke C. Potom existuje aj integrál z funkcie f, resp. $\mathbf{f}$ po krivke C^* a platí

   (a) $\displaystyle\int\limits_{C^*} f(P)ds = -\int\limits_C f(P)ds$,

   (b) $\displaystyle\int\limits_{C^*} \mathbf{f}(P) \cdot \mathbf{ds} = -\int\limits_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathbf{ds}$,

   (c) $\displaystyle\int\limits_{C^*} f(P)ds = \int\limits_C f(P)ds$,

   (d) $\displaystyle\int\limits_{C^*} \mathbf{f}(P) \cdot \mathbf{ds} = \int\limits_C \mathbf{f}(P) \cdot \mathbf{ds}$,

3. T9-3 (4b) Nech $I_i = \int_{C_i}(xy^2+1)dx + (yx^2-1)dy$, nech C_i je oblúk AB, $A = (0,0), B = (1,1)$, kde $C_1 : y = x^2$; $C_2 : y = x$; $C_3 : y = 0$ pre $x \in \langle 0, 1\rangle$, $x = 1$ pre $y \in \langle 0, 1\rangle$. Potom

   (a) $I_1 = \frac{1}{2}$,

   (b) $I_1 = -I_2$,

   (c) $I_1 = 2I_3$,

   (d) $I_1 = I_2 = I_3$.

4. T9-4 (2b) Nech A je uzavretá množina, ktorá má tú vlastnosť, že jej hranica C je kladne orientovanou, jednoduchou, uzavretou a po častiach hladkou krivkou. Nech funkcie $p(x,y), q(x,y), p'_y(x,y), q'_x(x,y)$, sú spojité na A. Potom platí:

   (a) $\iint\limits_A [q'_x(x,y) - p'_y(x,y)]dxdy = \int\limits_C p(x,y)dx + q(x,y)dy$,

   (b) $\iint\limits_A [q'_y(x,y) - p'_x(x,y)]dxdy = \int\limits_C p(x,y)dx + q(x,y)dy$,

   (c) $\iint\limits_A [q'_x(x,y) - p'_y(x,y)]dxdy = \int\limits_C p(x,y)dx - q(x,y)dy$,

   (d) $\iint\limits_A [q'_y(x,y) + p'_x(x,y)]dxdy = \int\limits_C p(x,y)dx + q(x,y)dy$.

5. T9-5(2b) Nech $I = \oint_{C_i}(xy^2+1)dx + (yx^2-1)dy$, nech $C_1 : 1 = x^2 + y^2$;
   $C_2 : x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Potom

(a) $I_1 = I_2 = 0$, (b) $I_1 = -I_2$.