8.2 Nevlastné parametrické integrály

Nech funkcia $f(x,y)$ je definovaná na intervale $\langle a,\infty) \times \langle c,d \rangle$ a pre každé $y \in \langle c,d \rangle$ existuje $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$. Potom funkciu

$$F(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

nazývame **nevlastným parametrickým integrálom** alebo nevlastným integrálom závislým od parametra y. Podobne môžeme definovať aj nevlastné parametrické integrály vzhľadom na dolnú hranicu. Pre nevlastné parametrické integrály platia podobné vety ako pre parametrické integrály.

Okrem elementárnych funkcií majú veľký význam i niektoré neelementárne funkcie. Istým zovšeobecnením pojmu faktoriál je tzv. gama funkcia.

Funkciu

$$\Gamma(y) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx,$$

ktorá je definovaná pre každé $y > 0$ nazývame **gama funkciou.** Uvedieme niektoré základné vlastnosti gama funkcie:

- Funkcia Γ má deriváciu na svojom obore definície.
- Pre každé $y > 0$ je $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$.
- Pre každé prirodzené číslo n platí $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Funkciu

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

ktorá je definovaná pre $p > 0, q > 0$, nazývame **beta funkciou**.

Platí: $B(p,q) = B(q,p)$ a $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.