14.2 Funkcia viac premenných

Príklad Vypočítajte $c = \dfrac{df(x)}{dx}$ a $c2 = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$, ak $f(x) = \sin 2x + \sin x^2 + \sin^2 x$.

Riešenie.

```
>> syms x
>> f = sin(2*x)+sin(x^2)+(sin(x))^2

f =
 sin(2*x)+sin(x^2)+sin(x)^2

>> c=diff(f,x)
c =
2*cos(2*x)+2*cos(x^2)*x+2*sin(x)*cos(x)
>> c2=diff(f,x,2)
c2 =
-4*sin(2*x)-4*sin(x^2)*x^2+2*cos(x^2)+2*cos(x)^2-2*sin(x)^2
```

Príklad Vypočítajte $s = \dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y}$ ak $g(x,y) = x^3 y + y - x$.

Riešenie.

```
>> syms a x y
>> g=x^3*y+y-x
g =
x^3*y+y-x
>> s=diff(diff(g,x),y)
s =
3*x^2
```

Príklad Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Riešenie.

```
>> syms x y
>> f=x^3+3*x*y^2-15*x-12*y
 f =    x^3+3*x*y^2-15*x-12*y

>> fx=diff(f,x)
fx =   3*x^2+3*y^2-15

>> fy=diff(f,y)
 fy =   6*x*y-12

>> [x,y] = solve(fx, fy)
 x =                y =
[  2]               [  1]
[  1]               [  2]
[ -1]               [ -2]
[ -2]               [ -1]
```

Teda body $P_1 = (2;1)$, $P_2 = (1;2)$, $P_3 = (-1;-2)$, $P_4 = (-2;-1)$, sú stacionárne body danej funkcie. Nájdeme druhé derivácie:

```
>> fxy=diff(diff(f,x),y)
fxy =    6*y

>> fxx=diff(diff(f,x),x)
fxx =   6*x

>> fyy=diff(diff(f,y),y)
fyy =   6*x

>> D=fxx*fyy-(fxy)^2
D =   36*x^2-36*y^2
```

Teraz overíme podmienky pre existenciu lokálnych extrémov v stacionárnych bodoch.
Pre prvý bod $P_1 = (2;1)$ dostávame:

```
>> x=2, y=1
x =   2
y =   1

>> DP1=36*x^2-36*y^2
DP1 = 108
```

čo je kladné a teda v bode $P_1 = (2;1)$ funkcia má lokálny extrém. Pretože fxx(2,1) = 6*2>0 daná funkcia $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ má v bode $P_1 = (2;1)$ lokálne maximum = $f(P_1)$.
Pričom

```
>> fP1=x^3+3*x*y^2-15*x-12*y
fP1 =  -28
```

V bode $P_2 = (1;2)$ je

```
>> x=1, y=2
x =  1
y =  2

>> DP1=36*x^2-36*y^2
DP1 =  -108
```

čo je záporné a teda v bode $P_2 = (1;2)$ daná funkcia nemá lokálny extrém. Podobne postupujeme v bodoch $P_3 = (-1;-2)$, $P_4 = (-2;-1)$.

Príklad Nájdime lokálne extrémy funkcie $z = f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$.

Riešenie.

```
>> syms x y
>> z=x.*exp(-x.^2-y.^2)
 z = x*exp(-x^2-y^2)

>> fx=diff(z,x),fy=diff(z,y)
fx = exp(-x^2-y^2)-2*x^2*exp(-x^2-y^2)
fy = -2*x*y*exp(-x^2-y^2)
>> [x,y] = solve(fx, fy)
x =
```

[1/2*2^(1/2)]
[-1/2*2^(1/2)]

 y =
 [0]
 [0]

```
>> syms x y
>> fxy=diff(diff(z,x),y)
fxy = -2*y*exp(-x^2-y^2)+4*x^2*y*exp(-x^2-y^2)

>> fxx=diff(diff(z,x),x)
fxx = -6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2)

>> fyy=diff(diff(z,y),y)
 fyy = -2*x*exp(-x^2-y^2)+4*x*y^2*exp(-x^2-y^2)

>> D=fxx*fyy-(fxy)^2
D =
(-6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2))*(-2*x*exp(-x^2-y^2)+4*x*y^2*exp(-x^2-y^2))-(-2*y*exp(-x^2-y^2)+4*x^2*y*exp(-x^2-y^2))^2
```

Teraz overíme podmienky pre existenciu lokálnych extrémov v stacionárnych bodoch.
Pre prvý bod $P_1 = \left(1/2 * 2\wedge(1/2);0\right)$ dostávame:

```
>> x= 1/2*2^(1/2),y=0
x =    0.7071
y =     0

>> DP1=(-6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2))*(-2*x*exp(-x^2-y^2)+4*x*y^2*exp(-x^2-y^2))-(-2*y*exp(-x^2-y^2)+4*x^2*y*exp(-x^2-y^2))^2
DP1 =    1.4715
```

čo je kladné a teda v bode P_1 funkcia má lokálny extrém. Pretože

```
>> x= 1/2*2^(1/2),y=0
>> fxx=-6*x*exp(-x^2-y^2)+4*x^3*exp(-x^2-y^2)

fxx(P1) =    -1.7155
```

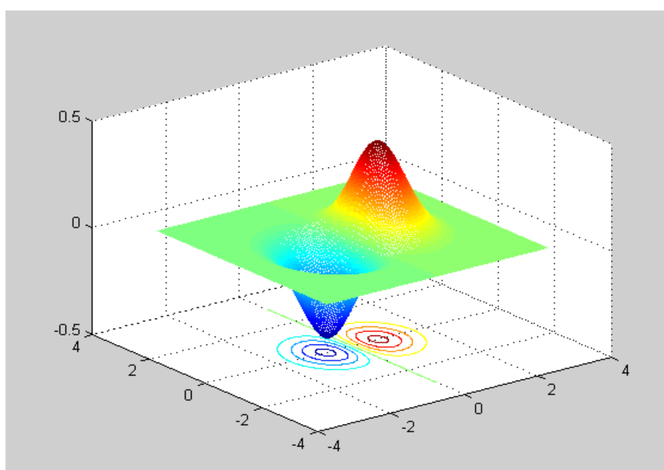
je záporná, daná funkcia má v bode P_1 lokálne maximum, pričom

```
>> lokmaxf=x.*exp(-x.^2-y.^2)

lokmaxf =    0.4289
```

Podobne by sme vyšetrili aj bod P_2.
Graf danej funkcie v okolí uvedených bodov dostaneme takto:

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:0.025:3,-3:0.025:3);
```



```
>> z=x.*exp(-x.^2-y.^2);
>> meshc(x,y,z);
```