8.1 Integrály závislé od parametra

Uvažujme funkciu $f : J \to \boldsymbol{R}$, kde $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Nech pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ je funkcia $\varphi(x) = f(x, y)$ integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$. Nech $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Potom funkciu

$$F(y) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dx$$

nazývame **parametrickým integrálom** alebo integrálom závislým od parametra. Pomocou parametrických integrálov sú definované niektoré významné funkcie, zároveň ich môžeme použiť pri výpočte niektorých integrálov. Budú nás zaujímať vlastnosti funkcie F v závislosti na vlastnostiach funkcie f.

Veta 8.1 *Nech funkcia f je spojitá na intervale J, potom funkcia F je spojitá na intervale $\langle c, d\rangle$.*

Veta 8.2 *Nech parciálna derivácia $f'_y(x, y)$ je spojitá na intervale J. Potom pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ platí*

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_{a}^{b} f(x, y)dx = \int_{a}^{b} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx.$$

Veta 8.3 *Nech funkcia f je spojitá vzhľadom na interval J a funkcie $\alpha(y)$, $\beta(y)$ sú spojité na intervale $\langle c, d\rangle$, pričom ich obory hodnôt ležia v intervale $\langle a, b\rangle$. Potom parametrický integrál*

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx$$

je spojitá funkcia v intervale $\langle c, d\rangle$.

Veta 8.4 *Nech funkcia f je spojitá vzhľadom na interval J a funkcie $\alpha(y)$, $\beta(y)$ sú spojité na intervale $\langle c, d\rangle$, pričom ich obory hodnôt ležia v intervale $\langle a, b\rangle$. Nech existujú derivácie $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ v intervale $\langle c, d\rangle$ a $f'_y(x, y)$ je spojitá vzhľadom na interval J, potom*

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx + \beta'(y)f[\beta(y), y] - \alpha'(y)f[\alpha(y), y].$$