3.1 Základné pojmy 3

V praxi sa často stretávame s dejmi, ktoré sa pravidelne opakujú. Sú to tzv. periodické deje, ktoré možno popísať periodickými funkciami.

Poznámka 3.1 *Nech* $f : D \to \mathbf{R}$ *je periodická funkcia s periódou* T*. Potom* $\forall a \in D$ *platí*

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx,$$

ak niektorý z integrálov existuje.

Definícia 3.1 *Nech* f *je po častiach spojitá, periodická funkcia s periódou* T*. Trigonometrický rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \tag{1}$$

s periódou $T = (2\pi/\omega)$*, v ktorom*

$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cos n\omega x\,dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\sin n\omega x\,dx, \tag{2}$$

kde $n = 1, 2, \ldots,$ *nazývame Fourierov rad funkcie* f *(v reálnom tvare) a píšeme*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x). \tag{3}$$

Čísla a_n*,* $n = 0, 1, 2, \ldots$*;* b_n*,* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *nazývame Fourierove koeficienty.*

Poznámka 3.2 *Nech* $n \in N$*. Funkciu* $T_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$T_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

nazývame trigonometrickým polynómom najviac n*-tého stupňa s periódou* T*.*

Príklad 3.1 *Hľadajme Fourierov rad periodickej funkcie s periódou* $T = 2\pi$*, ak na intervale periódy je* $f : \langle -\pi, \pi) \to \mathbf{R}, f(x) = x$*.*

Riešenie. V tomto prípade je

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \cdots = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

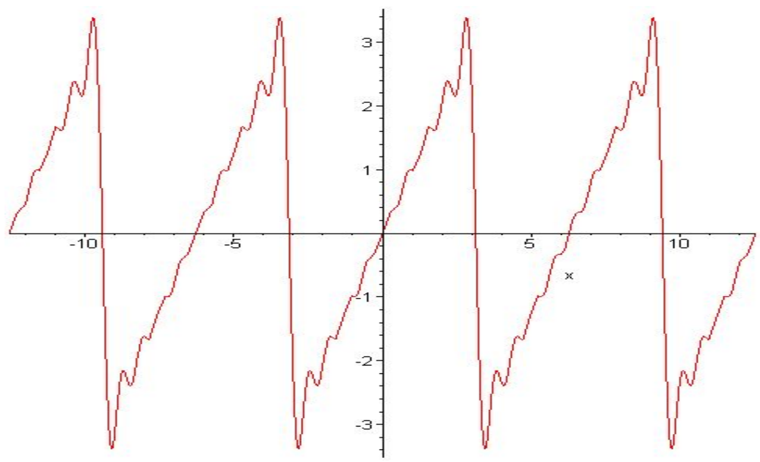
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin\frac{n\pi x}{\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\{[-\frac{x}{n}\cos nx]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2}[\sin nx]_{-\pi}^{\pi}\} =$$

$$= \frac{-2}{n} \cos n\pi = \frac{-2}{n}(-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Teda danú funkciu môžeme nahradiť pomocou jej Fourierovho radu

$$x \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Na nasledujúcom obrázku je aproximácia danej funkcie pre $n = 9$.



Veta 3.1 *Nech f je párna, periodická, po častiach spojitá funkcia. Potom pre jej Fourierove koeficienty platí*

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x \, dx = \frac{2}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = 0 \quad n = 1, 2, \ldots,$$

kde $T = 2l$ a $\omega = \pi/l$. Jej Fourierov rad, nazývaný kosínusový rad, má tvar

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x.$$

Veta 3.2 *Nech f je nepárna, periodická, po častiach spojitá funkcia. Potom pre jej Fourierove koeficienty platí*

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x \, dx = \frac{2}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

kde $T = 2l$ a $\omega = \pi/l$. Jej Fourierov rad, nazývaný sínusový rad, má tvar

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x.$$

Poznámka 3.3 *V Príklade 3.1 daná funkcia bola nepárna a teda koeficienty a_0, a_n sme nemuseli počítať.*