12.5 Výpočet určitých a nevlastných integrálov pomocou rezíduí

Základnú vetu o rezíduách funkcie môžeme využiť pri výpočte niektorých integrálov funkcie reálnej premennej.

- Integrál typu $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, kde R je spojitá racionálna funkcia premenných $\sin x, \cos x$ na intervale $\langle 0, 2\pi\rangle$ môžeme vypočítať nasledujúcim spôsobom. Vieme, že

$$\sin x = \frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}, \quad \cos x = \frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}.$$

Substitúciou $z = e^{i\,x}$, $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ dostaneme

$$\sin x = \frac{z - z^{-1}}{2\,i}, \quad \cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = i\,e^{i\,x}dx = i\,zdx,$$

odkiaľ $dx = -i\,z^{-1}dz$. Potom platí

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz,$$

kde

$$f(z) = \frac{-i}{z} R(\frac{z - z^{-1}}{2\,i}, \frac{z + z^{-1}}{2}).$$

Zo základnej vety o rezíduách vyplýva

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \oint\limits_{|z|=1} \frac{-i}{z} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2\,i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) dz = 2\pi\,i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(a_k),$$

kde a_k sú všetky singulárne body funkcie f, pre ktoré je $|a_k| < 1$.

Ak potrebujeme vypočítať $\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx$ musíme najskôr interval $\langle a, b\rangle$ transformovať na interval $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Príklad 12.11 *Vypočítajme* $\int\limits_0^{\pi} \frac{adx}{a^2+\sin^2 x}$, $a > 0$.

Riešenie. Najprv použijeme substitúciu $x = t/2$. Platí

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{adx}{a^2 + \sin^2 x} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{adt}{2a^2 + 1 - \cos t}.$$

Pomocou substitúcie $z = e^{i\,t}$ dostaneme

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{adt}{2a^2 + 1 - \cos t} = \oint\limits_K \frac{2a\,i}{1 - (2 + 4a^2)z + z^2} dz,$$

pričom K je kladne orientovaná kružnica $|z| = 1$. Podintegrálna funkcia má póly $z_1 = 1 + 2a^2 + 2a\sqrt{1+a^2}$, $z_2 = 1 + 2a^2 - 2a\sqrt{1+a^2}$. Vo vnútri kružnice K leží len bod z_2. Dostaneme

$$\oint_K \frac{2a\,i}{1-(2+4a^2)z+z^2}dz = 2\pi\,i\mathrm{res}[\frac{2a\,i}{1-(2+4a^2)z+z^2}, 2\,i] =$$

$$= 2\pi\,i\frac{-i}{2\sqrt{1+a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

- Nech konverguje integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, kde
  - f je analytická funkcia v každom bode množiny $M = \{z \in \boldsymbol{C} : \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pre ktoré platí $\mathrm{Im}\, a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$,
  - platí $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in M}} |zf(z)| = 0$.

Potom platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi\,i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\, f(a_k).$$

Poznámka 12.2 *Racionálna funkcia $f = \frac{P_n}{Q_m}$ spĺňa dané predpoklady, ak polynóm Q_m nemá reálne nulové body, $m \geq n+2$ (stupeň polynómu v menovateli je aspoň o dva väčší ako stupeň polynómu v čitateli).*