## 10.9 Rezíduum funkcie

V predchádzajúcej časti sme ukázali: ak $z_0$ je izolovaný singulárny bod funkcie $f$ analytickej na medzikruží $M = \{z \in D_f : 0 < |z - z_0| < R\}$, potom pre každý bod $z \in M$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Pre koeficienty $a_n$ platí vzťah

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

kde $\Gamma$ je ľubovoľná jednoduchá uzavretá kladne orientovaná po častiach hladká krivka, ktorá leží v medzikruží $M$. Určité výnimočné postavenie má koeficient $a_{-1}$, pretože $\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi\, i a_{-1}$. Koeficient $a_{-1}$ v tomto Laurentovom rade sa nazýva **rezíduum funkcie** $f$ v bode $z_0$ a označujeme ho $\mathrm{res}[f(z)]_{z=z_0}$ alebo $\mathrm{res} f(z_0)$, alebo $\mathrm{res}[f(z), z_0]$. Teda

$$\mathrm{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

kde $\Gamma$ je jednoduchá uzavretá kladne orientovaná po častiach hladká krivka, ktorá leží v medzikruží $M$ a v jej vnútri leží bod $z_0$.

**Veta 10.21** *Nech funkcia $f$ má v bode $z_0$ $m$-násobný pól, potom platí*

$$\mathrm{res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

**Veta 10.22** *(základná veta o rezíduách). Nech funkcia $f$ je analytická v oblasti $\Omega$ s výnimkou konečného počtu izolovaných singulárnych bodov. Nech $\Gamma$ je jednoduchá uzavretá po častiach hladká kladne orientovaná krivka taká, že aj so svojím vnútrom leží v oblasti $\Omega$. Nech $z_1, z_2, \dots, z_n$ sú všetky izolované singulárne body funkcie $f$, ktoré ležia vo vnútri krivky $\Gamma$. Potom platí*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}[f(z)]_{z=z_k}.$$

**Príklad 10.10** *Vypočítajme rezíduum funkcie $f(z) = (z+2)/[(z - 2\, i)^2 (z+1)]$ v bode $z_0 = 2\, i$.*

*Riešenie.* Bod $z_0 = 2\, i$ je pólom násobnosti $m = 2$. Platí

$$\mathrm{res}[f(z), 2\, i] = \lim_{z \to 2\, i} \frac{d}{dz} [(z - 2ß)^2 \frac{z+2}{(z - 2\, i)^2 (z+1)}] = \frac{3 + 4\, i}{25}.$$

Nech funkcia $f$ je analytická v okolí $|z| > r$ bodu $z = \infty$. **Rezíduum funkcie** $f$ v bode $z = \infty$ nazýva sa záporne vzatý koeficient $a_{-1}$ v Laurentovom rade funkcie $f$ so stredom v bode $z = \infty$ pre medzikružie $|z| > r$. Pre rezíduum funkcie $f$ v bode $z = \infty$ platí

$$\mathrm{res}[f(z)]_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi\, i} \oint_{\Gamma^*} f(z) dz,$$

kde $\Gamma^*$ je záporne orientovaná kružnica $|z| = R, R > r$.

**Veta 10.23** *Nech funkcia $f$ je analytická na $\boldsymbol{C}^*$ s výnimkou konečného počtu jej singulárnych bodov $z_1$, $z_2, \ldots, z_n$, potom platí*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}[f(z)]_{z=z_k} + \operatorname{res}[f(z)]_{z=\infty} = 0.$$

Nech funkcia $f$ je analytická v bode $z_0$. **Logaritmickým rezíduom funkcie** $f$ v bode $z_0$ nazýva sa rezíduum jej logaritmickej derivácie

$$[\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{v bode} \quad z_0.$$