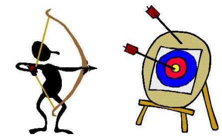
16 Niektoré aplikácie

Cieľ
V tejto časti, ktorú uvádzame ako prílohu, chceme študentov oboznámiť s možnosťou použitia niektorých častí predmetu Matematická analýza II na riešenie úloh z rôznych oblastí technickej praxe. Vzhľadom na ohraničený časový priestor uvedieme iba niektoré konkrétne aplikácie.



Použitie Fourierovych radov

Príklad Nájdime periodické riešenie rovnice $y'' - y = |\sin t|$.

Riešenie. Funkciu $|\sin t|$ rozvinieme do Fourierovho radu

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{4k^2-1}$$

Riešenie rovnice predpokladáme v tvare

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kt + B_k \sin kt,$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-k^2 A_k \cos kt - k^2 B_k \sin kt\right),\quad \text{po dosadení do riešenej rovnice}$$

$$y'' - y = -\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-k^2-1)A_k \cos kt + (-k^2-1)B_k \sin kt\right] = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{4k^2-1}.$$

Odtiaľ

$$\frac{A_0}{2} = -\frac{2}{\pi},\qquad B_k = 0,\qquad A_{2k-1} = 0,$$

$$-A_{2k}\left(4k^2+1\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1},\qquad A_{2k} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{16k^4-1}$$

$$y = -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kt}{16k^4-1}.$$

Diferenciálne rovnice I. rádu

Príklad V elektrickom obvode s rezistorom odporu R a cievkou indukčnosti L, ktorý je pripojený na zdroj konštantného napätia U_0 určíme, aký je prúd v závislosti na čase.

Riešenie. Použitím Ohmovho a Kirchhoffovho zákona zapíšeme rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L}$$

Riešením tejto rovnice je každá funkcia vo všeobecnom tvare

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(c+\frac{U_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t\right)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(c+\frac{U_0}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right)=ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_0}{R}$$

Z podmienky $i(0)=0$ dostaneme konštantu $c=-\frac{U_0}{R}$ a po úprave

$$i(t)=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Príklad Vypočítajme množstvo rádioaktívnej látky m v ľubovoľnom okamihu t.

Riešenie. Predpokladajme, že v čase $t=t_0$ je m_0 jednotiek látky. Rýchlosť rozpadu rádioaktívnej látky je úmerná množstvu prítomnej látky. Podľa uvedeného zákona rozpadu platí

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-km,$$

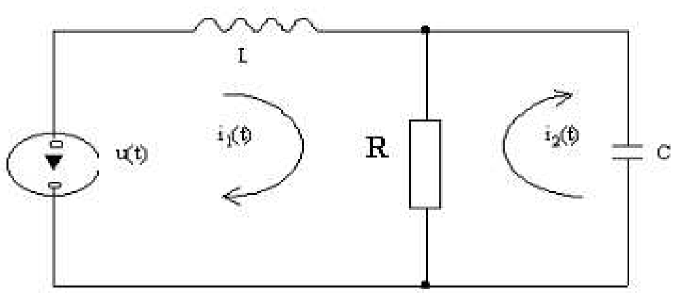
kde $m=m(t)$ je spojitá funkcia, $k>0$ je konštanta úmernosti. Riešením uvedenej rovnice spolu s počiatočnou podmienkou $m(t_0)=m_0$ je funkcia

$$m=m_0e^{-k(t-t_0)}.$$

Sústavy diferenciálnych rovníc

Príklad Stanovme prúdy $i_1(t)$ a $i_2(t)$ v obvode na obrázku, keď cievkou v okamihu pripojenia zdroja konštantného napätia $u(t)=U_0$ preteká prúd i_0 a na kondenzátore bolo v tomto okamihu napätie U_C. Pripojenie napätia uvažujeme v okamihu $t=0$.

Úlohu doriešime s hodnotami $U_0=10$ V, $i_0=0{,}5$ A, $U_C=20$ V, $R=100\ \Omega$, $L=2$ H, $C=10^{-4}$ F.



Riešenie. Na základe Kirchhoffových zákonov dostaneme tieto rovnice

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+R(i_1-i_2)=U_0$$

$$R(i_2-i_1)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2(s)\,\mathrm{d}s+U_C=0.$$

Začiatočná podmienka je $i_1(0)=i_0$. Prvá rovnica je diferenciálna, druhá rovnica je integrálna. Ak ju zderivujeme, dostaneme

$$R\left(\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{C}i_2(t)=0.$$

Integráciou tejto rovnice v hraniciach od 0 do t dostaneme

$$R\left[i_2(t) - i_2(0) - i_1(t) - i_1(0)\right] + \frac{1}{C}\int_0^t i_2(s)\,\mathrm{d}s = 0\,.$$

Ak platí

$$R\left[i_1(0) - i_2(0)\right] = U_C\,,\text{ čiže}$$

$$i_2(0) = -\frac{U_C}{R} + i_0\,,$$

pôvodná sústava so začiatočnou podmienkou $i_1(0) = i_0$ je ekvivalentná so sústavou diferenciálnych rovníc

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R(i_1 - i_2) = U_0$$

$$R\left(\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{C}i_2 = 0\,.$$

Odtiaľ

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i_1 + \frac{R}{L}i_2 + \frac{U_0}{L}$$

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i_1 + \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{RC}\right)i_2 + \frac{U_0}{L}\,.$$

Túto sústavu s konkrétnymi hodnotami doriešime eliminačnou metódou.

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -50i_1 + 50i_2 + 5$$

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -50i_1 - 50i_2 + 5$$

so začiatočnými podmienkami

$$i_1(0) = 0{,}5$$

$$i_2(0) = 0{,}3$$

Riešením tejto sústavy je

$$i_1(t) = 0{,}4e^{-50t}\cos 50t + 0{,}3e^{-50t}\sin 50t + 0{,}1$$

$$i_2(t) = 0{,}3e^{-50t}\cos 50t - 0{,}4e^{-50t}\sin 50t\,.$$

Príklad. Model Lovec -korisť

Nech $x(t)$, $y(t)$ sú populácie predátorov a ich koristi v čase t. Predpokladáme, že

(i) Neprítomnosť predátorov znamená, že korisť rastie rýchlosťou priamo úmernou veľkosti svojej populácie.
(ii) Ak nie je prítomná korisť, tak populácia lovcov klesá úmerne svojej veľkosti.
(iii) Prítomnosť aj koristi aj predátorov spôsobuje rast populácie predátorov a pokles populácie koristi, t.j. populácia predátorov rastie a populácia koristi klesá úmerne súčinu oboch populácii.

Tieto predpoklady vedú k nasledujúcemu systému diferenciálnych rovníc

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by), \qquad a, b > 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = -py + qxy = -y(p - qx), \qquad p, q > 0.$$

Je zrejmé, že obe derivácie dx/dt, dy/dt sú nulové ak

$$x = x_e = \frac{p}{q}, \quad y = y_e = \frac{a}{b}.$$

Hodnoty x_e, y_e predstavujú ekvilibrium (rovnováhu).

- **Model súperenia**

Nech $x(t), y(t)$ sú dve populácie súperiace o zdroje potravy. Potom neprítomnosť jednej populácie pôsobí priaznivo na rast druhej populácie a naopak prítomnosť jednej populácie spôsobuje pokles druhej populácie. Tieto podmienky vedú k nasledujúcemu systému diferenciálnych rovníc.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = bx\left(\frac{a}{b} - y\right), \quad a, b > 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = py - qxy = qy\left(\frac{p}{q} - x\right), \quad p, q > 0.$$

Je zrejmé, že ekvilibrium nastáva v bode $(p/q, a/b)$. Ak uvažujeme súperenie v rámci toho istého druhu, tak máme

$$\frac{dx}{dt} = ax - a_{11}x^2 - bxy,$$
$$\frac{dy}{dt} = py - p_{11}y^2 - qxy.$$

Aplikácie dvojných trojných a krivkových integrálov

- **Geometrické a fyzikálne aplikácie dvojných a trojných integrálov**.

- Nech σ je merateľná množina v $\mathbf{R}^2$. Potom pre jej obsah platí

$$P = \iint_\sigma dxdy.$$

- Ak $f(x, y) \geq 0$ na množine σ, tak pre objem telesa zostrojeného nad množinou σ platí

$$V = \iint_\sigma f(x, y)dxdy.$$

- Nech ω je uzavretá merateľná množina z $\mathbf{R}^3$. Pre objem množiny ω platí
$$V = \iiint_\omega dxdydz.$$

- Nech je plocha S určená rovnicou $\mathbf{w} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in B$. Nech σ je taká merateľná podmnožina B, že je časťou roviny ohraničenou po častiach hladkou jednoduchou uzavretou krivkou. Nech parciálne derivácie $\mathbf{r}'_u$, $\mathbf{r}'_v$ sú spojité na množine σ, t.j. plocha S je na množine σ hladká . Potom pre obsah $P(\sigma)$ plochy S platí:

$$P(\sigma)=\iint_{\sigma}\left|\mathbf{r}_u'\times\mathbf{r}_v'\right|dudv\,.$$

- Ak je plocha S určená rovnicou $y=f(x,y)$, $(x,y)\in\sigma$, pričom z_x',z_y' sú na množine σ spojité funkcie, potom
$$P(\sigma)=\iint_{\sigma}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy\,.$$
- Nech je rovinná oblasť σ dvojrozmerná merateľná množina, ktorej plošná hustota v jej ľubovoľnom bode $X=(x,y)$ je $\mu(x,y)$. Majme za úlohu určiť hmotnosť rovinnej oblasti σ. Celková hmotnosť rovinnej oblasti σ je
$$m=\iint_{\sigma}\mu(x,y)dxdy\,.$$

Poznámka. Podobne môžeme postupovať pri riešení úlohy výpočtu prietokového množstva tekutiny, ktorá preteká cez potrubie veľkých rozmerov a v jednom reze kolmom na os potrubia je daná rýchlosť prúdenia (v jednotlivých bodoch rezu je funkciou $v(x,y)$).

- Pri výpočte statických momentov hmotnej oblasti σ vzhľadom na os o_x, resp. o_y je
$$S_x=\iint_{\sigma}y\mu(x,y)dxdy,\quad S_y=\iint_{\sigma}x\mu(x,y)dxdy\,.$$
- Súradnice ťažiska $T=(x_T,y_T)$ hmotnej oblasti σ v pravouhlom súradnicovom systéme sú:
$$x_T=\frac{S_y}{m},\quad y_T=\frac{S_x}{m}\,.$$
- Moment zotrvačnosti hmotnej oblasti σ vzhľadom na os o_x, resp. o_y, resp. o_z je:
$$I_x=\iint_{\sigma}y^2\mu(x,y)dxdy,\quad I_y=\iint_{\sigma}x^2\mu(x,y)dxdy,\quad I_z=\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy\,.$$
- Nech teleso V je trojrozmerná merateľná množina, ktorého objemová hustota v ľubovoľnom bode $X=(x,y,z)$ je $\mu(x,y,z)$. Hmotnosť telesa V je:
$$m=\iiint_{V}\mu(x,y,z)dxdydz\,.$$
- Statický moment telesa V vzhľadom na rovinu o_{xy}, resp. o_{yz}, resp. o_{xz} je
$$S_{xy}=\iiint_{V}z\mu(x,y,z)dxdydz,\quad S_{yz}=\iiint_{V}x\mu(x,y,z)dxdydz\quad ,S_{xz}=\iiint_{V}y\mu(x,y,z)dxdydz\,.$$
- Súradnice ťažiska $T=(x_T,y_T,z_T)$ telesa V v pravouhlom súradnicovom systéme sú:
$$x_T=\frac{S_{yz}}{m},\quad y_T=\frac{S_{xz}}{m},\quad z_T=\frac{S_{xy}}{m}\,.$$
- Moment zotrvačnosti telesa V vzhľadom na os o_x, resp. o_y, resp. o_z je:
$$I_x=\iiint_{V}(y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz,\quad I_y=\iiint_{V}(x^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz\quad ,$$
$$I_z=\iiint_{V}(x^2+y^2)\mu(x,y,z)dxdydz.$$
- Nech je dané teleso A a bod $X_0=(x_0,y_0,z_0)$ mimo neho. Máme vypočítať gravitačný potenciál tohto telesa v bode X_0. Potenciál v bode X_0 možno vypočítať podľa vzorca
$$v(E)=-k\iiint_{E}\frac{\mu(X)}{\rho(X,X_0)}dX$$
pre každú časť E telesa A, kde k je gravitačná konštanta.

- V priestore je rovina a v tejto rovine množina, ktorá predstavuje vrstvu elektrického náboja s plošnou hustotou náboja μ . Je daný bod X_0 mimo A a je potrebné určiť elektrický (coulombovský) potenciál v v bode X_0 budený vrstvou A. Pre hľadaný potenciál platí

$$v = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_A \frac{\mu(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}dxdy ,$$

pričom ε je dielektrická konštanta.

- **Fyzikálne aplikácie krivkového integrálu**

Nech $\mu(M)$ je lineárna hustota v ľubovoľnom bode M po častiach hladkej krivky C orientovanej súhlasne s jej parametrickým vyjadrením, potom:

- Hmotnosť m krivky C je:

$$m = \int_C \mu(M)ds .$$

- Súradnice ťažiska $T = (x_T, y_T, z_T)$ krivky C sú:

$$x_T = \frac{1}{m}\int_C x\mu(M)ds = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{1}{m}\int_C y\mu(M)ds = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{1}{m}\int_C z\mu(M)ds = \frac{S_{xy}}{m} .$$

- Nech je silové pole dané vektorovou funkciou $\mathbf{f}(M)$, potom práca A tohto poľa po krivke C je:

$$A = \int_C \mathbf{f}(M)\cdot \mathbf{ds} .$$

Ak táto práca nezávisí od integračnej cesty, silové pole sa nazýva **konzervatívne** a potenciál funkcie $\mathbf{f}$ sa nazýva **potenciál silového poľa**. Ak táto práca závisí od integračnej cesty, silové pole sa nazýva **disipatívne**.

Nech G je otvorená plošne jednoducho súvislá množina. Nech $\mathbf{f}$ je vektorová funkcia spojitá na množine G, ktorá má spojité parciálne derivácie na množine G. Nutná a postačujúca podmienka na to, aby existoval potenciál U funkcie $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} = \operatorname{grad} U$, je $\operatorname{rot}\mathbf{f}(M) = \mathbf{0}$ na množine G.
Teda ak funkcia $\mathbf{f} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ má potenciál U na množine G, potom

$$dU = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

je totálnym diferenciálom funkcie U a platí:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z) .$$

Teda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} .$$

Príklad Je dané pole $F: R^2 \to V\left(R^2\right), F(x,y) = \left(2xy, x^2 + 9y^2\right)$. Zistíme, či je pole potenciálne a nájdeme jeho potenciál.

Riešenie. Platí $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2x,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=2x$, teda $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ a pole je potenciálne.

Potenciál $U(x,y)$ nájdeme takto

$$U(x,y)=\int 2xy\,\mathrm{d}x = x^2y+\psi(y) \qquad (☺)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2+\psi'(y)=x^2+9y^2$$

Odtiaľ vyplýva

$$\psi'(y)=9y^2$$

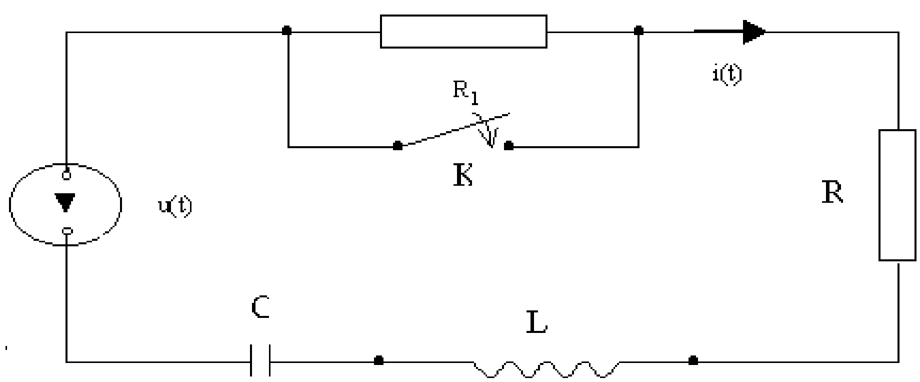
$$\psi(y)=3y^3+k$$

Po dosadení do (☺) dostaneme potenciál

$$U(x,y)=x^2y+3y^3+k.$$

Laplaceova transformácia

Príklad Určíme prúd $i(t), t\in\langle 0,\infty)$ v obvode na obrázku, ktorý bol v čase $t=0$ pripojený na zdroj napätia $u(t)=U_0\sin\omega t$, ak $i(0+)=i_0,\ \omega\in R$.



Riešenie. Priebeh prúdu i v danom obvode opisuje diferenciálna rovnica

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=U_0\sin\omega t,$$

ktorá sa za predpokladu, že $i\in D_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{L}\{i(t)\}=I(p)$, transformuje do tvaru

$$pLI(p)-Li_0+RI(p)=\frac{U_0\omega}{p^2+\omega^2},$$

odkiaľ

$$I(p)=\frac{U_0}{L}\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\left(p+\frac{R}{L}\right)}+\frac{i_0}{p+\frac{R}{L}} \qquad (☼)$$

Keďže platí

$$\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\left(p+\frac{R}{L}\right)}=\frac{\omega}{\omega^2+\frac{R^2}{L^2}}\left[\frac{-p+\frac{R}{L}}{p^2+\omega^2}+\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]$$

z (☼) dostaneme

$$I(p)=\frac{U_0}{L}\frac{\omega}{\omega^2+\frac{R^2}{L^2}}\left[\frac{-p+\frac{R}{L}}{p^2+\omega^2}+\frac{1}{p+\frac{R}{L}}\right]+\frac{i_0}{p+\frac{R}{L}}$$

z čoho použitím tabuľky originálov a obrazov Laplaceovej transformácie, dostaneme

$$i(t)=\frac{U_0}{L}\frac{\omega}{\omega^2+\frac{R^2}{L^2}}\left(\frac{R}{L\omega}\sin\omega t-\cos\omega t+e^{-\frac{R}{L}t}\right)+i_0e^{-\frac{R}{L}t}=U_0\frac{R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t+L\omega e^{-\frac{R}{L}t}}{L^2\omega^2+R^2}+i_0e^{-\frac{R}{L}t}$$