9.3 Cvičenia 9

1. Vypočítajte krivkové integrály:

   a) $\int_l \frac{ds}{x-y}$, kde l je úsečka AB, $A=(0;-2)$, $B=(4;0)$; $[\sqrt{5}\ln 2]$

   b) $\int_l (x+y)ds$, kde l je obvod trojuholníka ABC, $A=(1;-1)$, $B=(2;-1)$, $C=(1;0)$; $[1+\sqrt{2}]$

   c) $\int_l x^2 ds$, kde l je oblúk AB krivky $y=\ln x$, $A=(2;\ln 2)$, $B=(1;0)$; $[(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})/3]$

   d) $\int_l \sqrt{x^2+y^2}ds$, kde l je kružnica $x^2+y^2=ax$, $a>0$; $[2a^2]$

   e) $\int_l x^2 y ds$, kde l je oblúk elipsy $\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+b\sin t\boldsymbol{j}$, $0\le t\le \pi/2$, ktorého prvý bod je $A=(a;0)$, $a>b>0$; $[a^6 b[\arcsin(c/a)-bc(b^2-c^2)/a^4]/8c^3,\ c^2=a^2-b^2]$

   f) $\int_l (x^2+y^2)ds$, kde l je krivka $\boldsymbol{r}=a[(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j}]$, $0\le t\le 2\pi$; $[2\pi^2 a^3(1+2\pi^2)]$

   g) $\int_l z ds$, kde l je krivka $\boldsymbol{r}=t\cos t\boldsymbol{i}+t\sin t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$, $0\le t\le\sqrt{2}$. $[(8-2\sqrt{2})/3]$

2. Vypočítajte krivkové integrály druhého druhu:

   a) $\oint_l (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, kde l je obvod trojuholníka s vrcholmi $A=(1;1)$, $B=(2;2)$, $C=(1;3)$, pričom (A,B,C) je trojica usporiadaná v zmysle orientácie krivky l; $[0]$

   b) $\int_l (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, kde l je oblúk paraboly $y=x^2$ od bodu $A=(-1;1)$ po bod $B=(1;1)$; $[-14/15]$

   c) $\int_l ydx+xdy$, kde l je kružnica $\boldsymbol{r}=a(\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j})$, $0\le t\le\pi/2$ a bod $A=(a;0)$ je jej prvý bod; $[0]$

   d) $\int_l [(2a-y)\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}]d\boldsymbol{s}$, kde l je orientovaný oblúk cykloidy $\boldsymbol{r}=a(t-\sin t)\boldsymbol{i}+a(1-\cos t)\boldsymbol{j}$), $0\le t\le 2\pi$ a bod $A=(0;0)$ je jej prvý bod; $[-2\pi a^2]$

   e) $\int_l xdx+ydy+(x+y-1)dz$, kde l je úsečka AB, bod $A=(1;1;1)$ je jej prvý bod a $B=(2;3;4)$; $[13]$

   f) $\int_l yzdx+xzdy+xydz$, kde l je oblúk skrutkovice $\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+a\sin t\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}/(2\pi)$ od bodu $A=(1;0;0)$ po bod $B=(a;0;b)$. $[0]$