4.2 Limita a spojitosť funkcie

4.2.1 Reálne funkcie v $\boldsymbol{R}^n$

V tejto kapitole sa budeme zaoberať funkciami (zobrazeniami) $F : A \to B$, kde $A \subset \boldsymbol{R}^m$ a $B \subset \boldsymbol{R}^n$ a množiny A, B budú mať nejakú štruktúru. Budeme pracovať so štruktúrou generovanou metrikami na A a B $(F : (A, \rho_1) \to (B, \rho_2))$.

Príklad 4.4 *Povrch S kvádra, ktorého strany sú a, b, c je určený vzorcom $S = 2(ab+bc+ac)$, $a > 0, b > 0, c > 0$.*

Môžeme povedať, že S je funkciou troch premenných: $S = S(a, b, c)$. Ak $A = \{(a, b, c) \in \boldsymbol{R}^3 | \quad a > 0, b > 0, c > 0\}$, tak $S : A \to \boldsymbol{R}$.

Príklad 4.5 *Uvažujme funkciu $f : \boldsymbol{R} \supset A \to \boldsymbol{R}^2$, $f(t) = (2\cos t, 2\sin t) = (x, y)$, kde A je uzavretý interval $\langle 0, 2\pi\rangle$. Body $(2\cos t, 2\sin t), t \in \langle 0, 2\pi)$ vyplnia pri znázornení v pravouhlej súradnicovej sústave kružnicu.*

Príklad 4.6 *Nech : $\boldsymbol{R}^2 \supset A \to \boldsymbol{R}^3$, kde $A = \{(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 | u^2 + v^2 \le 1\}$ a $f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) = (x, y, z)$. Táto funkcia zobrazuje jednotkový kruh A do $\boldsymbol{R}^3$. Obrazy splňajú podmienku $z = x^2 + y^2$, teda ležia na rotačnom paraboloide.*

Každej funkcii $f : A \to \boldsymbol{R}$, $A \subset \boldsymbol{R}^n$, môžeme priradiť **graf**, ktorý spravidla definujeme takto:

$$\text{graf } f = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1} |\ (x_1, \dots, x_n) \in A,\ x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

4.2.2 Limita a spojitosť funkcie

V tomto článku sa budeme zaoberať limitou a spojitosťou funkcie $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to B \subset \boldsymbol{R}^n$.

Definícia 4.8 *Hovoríme, že funkcia $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}^n$, je* **spojitá v bode** *$a \in A$, ak pre každé $O_\varepsilon(f(a))$ existuje $O_\delta(a)$ také, že $f(O_\delta(a) \cap A\ ) \subset O_\varepsilon(f(a))$.*

Poznámka 4.4 *Definíciu spojitosti funkcie f v bode a môžeme vysloviť aj pomocou metriky:*

Funkcia f je spojitá v bode a, ak $a \in D(f)$ a k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $p \in D(f)$, $\rho(p, a) < \delta$ platí $\rho(f(p), f(a)) < \varepsilon$ (presnejšie by sme mali uviesť $\rho_1(p, a) < \delta$ platí $\rho_2(f(p), f(a)) < \varepsilon$, kde ρ_1 je metrika v priestore $A \subset \boldsymbol{R}^m$ a ρ_2 je metrika v priestore $\boldsymbol{R}^n$). Pretože v ďalšom texte budeme väčšinou používať iba euklidovskú metriku, nebudeme ju kvôli stručnosti zápisu v odpovedajúcich priestoroch špecifikovať. V prípadoch, kde by mohlo dôjsť k nejasnostiam danú metriku uvedieme explicitne.

Poznámka 4.5 *Ak a je izolovaný bod $D(f)$, tak f je spojitá v bode a.*

Definícia 4.9 *Nech $M \subset A$ a funkcia $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}^n$ je spojitá v každom bode $a \in M$. Potom hovoríme, že funkcia $f : A \to \boldsymbol{R}^n$ je* **spojitá na množine** *M. Ak funkcia $f : A \to \boldsymbol{R}^n$ je spojitá v každom bode $a \in A$, tak hovoríme, že $f : A \to \boldsymbol{R}^n$ je* **spojitá funkcia**.

Veta 4.5 *Funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$ práve vtedy, keď pre každú postupnosť $(p_k)_{k=1}^\infty$ bodov z $D(f)$ platí*

$$p_k \to a \Rightarrow f(p_k) \to f(a).$$

Príklad 4.7 *Nech funkcia* $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ *je definovaná takto:*
$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & pre (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & pre (x,y) = (0,0). \end{cases}$ *Je funkcia* f *spojitá v bode* $(0,0)$*?*

Riešenie. Vyšetrujme spojitosť v bode $O = (0,0)$. Vzhľadom na Vetu **??** stačí ukázať, že existuje postupnosť bodov $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taká, že $a_n \to (0,0)$ a $f(a_n) \to b \neq 0$. Uvažujme postupnosť bodov $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k bodu $O = (0,0)$. Pre zodpovedajúcu postupnosť funkčných hodnôt platí

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}, \quad \text{teda} \quad f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Vzhľadom na Vetu **??** je funkcia f nespojitá v bode $O = (0,0)$.

Veta 4.6 *Ak funkcie* $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \ \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R}^m \supset A \ \to \boldsymbol{R}$ *sú spojité v bode* $a \in A$, *sú v bode* a *spojité aj funkcie* $f+g$, $f \cdot g$, $|f|$ *a funkcia* $\dfrac{f}{g}$ *(pokiaľ* $g(a) \neq 0$*).*

Veta 4.7 *Nech* $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \boldsymbol{R}^n, A \subset \boldsymbol{R}^m$. *Potom funkcia* f *je spojitá v bode* $a \in A$ *práve vtedy, keď sú v bode* a *spojité všetky zložky* f_i, $i = 1, \ldots, m$.

Definícia 4.10 *Funkciu* $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \ \to \boldsymbol{R}$ *nazývame* **rovnomerne spojitá na množine** M, *ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *také, že pre každé* $x, y \in M$ *spĺňajúce nerovnosť* $\rho(x,y) < \delta$ *platí* $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definícia 4.11 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}^n$ *a* $a \in \boldsymbol{R}^m$ *je hromadným bodom množiny* A. *Potom hovoríme, že funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}^n$ *má v bode* a **limitu** $b \in \boldsymbol{R}^n$, *ak pre každé* $O_\varepsilon(b)$ *existuje* $\mathring{O}_\delta(a)$ *také, že* $f(\mathring{O}_\delta(a) \cap A) \subset O_\varepsilon(b)$. *Píšeme* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Poznámka 4.6 *Poslednú definíciu pomocou metriky môžeme vysloviť aj takto:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *práve vtedy, keď* a *je hromadný bod definičného oboru* $D(f)$ *a k ľubovoľnému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *také, že pre každé* $x \in D(f)$, $0 < \rho(x,a) < \delta$ *platí* $\rho(f(x), b) < \varepsilon$.

Podobne ako pri definícii spojitosti, môžeme pojem limity funkcie vyjadriť pomocou konvergencie postupnosti.

Veta 4.8 *Nech* a *je hromadný bod* $D(f)$. *Potom* $\lim\limits_{p \to a} f(p) = b$ *práve vtedy, keď pre každú postupnosť* $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ *platí* $p_k \in D(f)$, $p_k \neq a$, $p_k \to a$, *potom* $f(p_k) \to b$.

Definícia 4.12 *Ak má zúženie* $g = f_{|M}$ *v bode* a *limitu* b, *hovoríme, že* b *je* **limita funkcie** f **v bode** a **vzhľadom na množinu** M *a píšeme*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b.$$

Poznámka 4.7 *Ak existuje* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, *tak pre každú podmnožinu* $M \subset D(f)$, *ktorej hromadným bodom je bod* a, *platí*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b.$$

Z poznámky **??** vyplýva: ak pre dve množiny $M \subset D(f)$, $L \subset D(f)$ sú

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in L}} f(x)$$

rôzne, potom $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ neexistuje.

Príklad 4.8 *Nájdime*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Riešenie. Nech $M = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 | \quad y = kx, \quad x \in \boldsymbol{R}\}$, $k \neq 0$ sú priamky prechádzajúce bodom $O = (0, 0)$; a nech h je zúženie funkcie f na množinu M. Potom

$$h(x, y) = \frac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Vzhľadom na poznámku **??** dostávame rôzne $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} h(x, y)$ pre hodnoty $k = 0$, $k = 1$, teda funkcia $f(x, y)$ nemá v bode $O = (0, 0)$ limitu.

Nasledujúce vety sú analogické ako pri funkcii jednej premennej.

Veta 4.9 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}^n$ *a* $a \in A$ *je hromadný bod množiny* A. *Funkcia* $f : A \to \boldsymbol{R}^n$ *je spojitá v bode* a *práve vtedy, keď* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Veta 4.10 *Funkcia* $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}^n$ *má v bode* $a \in \boldsymbol{R}^m$ *najviac jednu limitu.*

Veta 4.11 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *a* $a \in \boldsymbol{R}^m$. *Potom* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_n) \in \boldsymbol{R}^n$ *práve vtedy, keď* $\lim\limits_{x \to a} f_k(x) = b_k \in \boldsymbol{R}$ *pre* $k = 1, \ldots, n$.

Veta 4.12 *Nech* $g : \boldsymbol{R}^m \supset A \to B \subset \boldsymbol{R}^n$ *a* $f : \boldsymbol{R}^n \supset B \to C \subset \boldsymbol{R}^k$. *Nech* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ *a* $\lim\limits_{u \to b} f(u) = c$. *Nech je splnená jedna z podmienok:*
1. Funkcia $f : B \to C$ *je spojitá v bode* b.
2. Pre každé $x \in \mathring{O}(a)$ *je* $g(x) \neq b$. *Potom* $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to b} f(u) = c$.

Poznámka 4.8 *Ak funkcia* $f : B \to C$ *je spojitá v bode* b *a bod* b *je hromadným bodom množiny* B, *tak* $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to a} g(x)) = f(b) = c$.

Veta 4.13 *Nech* $f : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}$ *a* $g : \boldsymbol{R}^m \supset A \to \boldsymbol{R}$ *a nech existujú limity* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \in \boldsymbol{R}$. *Potom platí*

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = b + c,$$

$$\lim_{x \to a} kf(x) = kb,$$

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = bc,$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \qquad \text{ak je } c \neq 0.$$

Tvrdenia uvedené v poslednej vete platia aj pre nevlastné limity, ak výrazy $b+c$, kb, $\dfrac{b}{c}$ majú zmysel v $\boldsymbol{R}^*$.

Veta 4.14 *Nech $f : \boldsymbol{R}^n \supset A \rightarrow \boldsymbol{R}$ je spojitá funkcia a A je kompaktná množina (t.j. uzavretá a ohrabičená). Potom platí:*
a) Funkcia f je na A ohraničená.
b) Funkcia f nadobúda na množine A maximálnu aj minimálnu hodnotu.
c) Funkcia f je na množine A rovnomerne spojitá.