

## 7.8 Cvičenia 7

1. Vypočítajte:

$$\text{a) } \int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx; \quad [14/3]$$

$$\text{b) } \int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}; \quad [\ln(25/24)]$$

$$\text{c) } \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}; \quad [\pi/12]$$

$$\text{d) } \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2 dy}{y^2}; \quad [9/4]$$

$$\text{e) } \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy. \quad [\pi/6]$$

2. Vypočítajte:

$$\text{a) } \iint_D \frac{x}{2} dx dy, \quad D : x = 2 + \sin y, x = 0, y = 0, y = 2\pi; \quad [9\pi/4]$$

$$\text{b) } \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}, \quad D : x = 3, x = 4, y = 1, y = 2; \quad [\ln(25/24)]$$

$$\text{c) } \iint_D 2y dx dy, \quad D : x + y = 2, y = 0, y = \sqrt{x}; \quad [5/6]$$

$$\text{d) } \iint_D x^2 y^{-2} dx dy, \quad D : y = x, y = 1/4, x = 2; \quad [9/4]$$

$$\text{e) } \iint_D e^x dx dy, \quad D : x = 0, y = 2, x = \ln y. \quad [1/2]$$

3. Vypočítajte:

$$\text{a) } \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy, \quad D : x^2 + y^2 = a^2, x > 0, y > 0; \quad [a\pi/2]$$

$$\text{b) } \iint_D \sqrt{x^2 - y^2} dx dy, \quad D : \text{je trojuholník s vrcholmi } A = (0; 0), B = (1; -1), C = (1; 1); \quad [\pi/6]$$

$$\text{c) } \iint_D \sqrt{xy - y^2} dx dy, \quad D : \text{je trojuholník s vrcholmi } A = (0; 0), B = (10; 1), C = (1; 1); \quad [6]$$

$$\text{d) } \iint_D e^{x/y} dx dy, \quad D : y^2 = x, y = 1, x = 0; \quad [1/2]$$

$$\text{e) } \iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}, \quad D : y = x^2/2, y = x. \quad [\ln 2]$$

4. Vypočítajte:

$$\text{a) } \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \text{ ak oblasť } V \text{ je ohraničená rovinou } z = 2 \text{ a paraboloidom } x^2 + y^2 = 2z; \quad [16\pi/3]$$

$$\text{b) } \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \text{ ak oblasť } V \text{ je ohraničená rovinami } y = 0, z = 0, z = a \text{ a valcom } x^2 + y^2 = 2x; \quad [8a^2/9]$$

$$\text{c) } \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \text{ ak oblasť } V \text{ je ohraničená plochou } x^2 + y^2 + z^2 = z; \quad [\pi/10]$$

$$\text{d) } \iiint_V dx dy dz, \text{ ak oblasť } V \text{ je ohraničená rovinou } z = 0, \text{ guľovou plochou } x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2 \text{ a valcovou plochou } x^2 + y^2 = 2Rx;$$

- e)  $\iiint_V (a^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{-1/2} dx dy dz$ , ak oblasť  $V$  je ohraničená rovinami  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  a guľovou plochou  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ;  $[(\pi/2 - 2/3)16R^3/3]$
- f)  $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$ , ak oblasť  $V$  je spoločná časť plôch  $2az = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ .  $[\pi^2 a^2/8]$
- g)  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$ , ak oblasť  $V$  je ohraničená rovinami  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .  $[\pi a^2(18\sqrt{3} - 97/6)/5]$
5. Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej danými krivkami:
- a)  $2x - y = 0$ ,  $2x - y = 7$ ,  $x - 4y + 7 = 0$ ,  $x - 4y + 14 = 0$ ;  $[7]$
- b)  $y = -2$ ,  $y = x + 2$ ,  $y = 2$ ,  $y^2 = x$ ;  $[40/3]$
- c)  $xy = a^2$ ,  $x^2 = ay$ ,  $y = 2a$ ,  $x = 0$ ,  $a > 0$ ;  $[a^2(23/24 + \ln 2)]$
- d)  $y^2 = 10x + 25$ ,  $y^2 = -6x + 9$ ;  $[\sqrt{15}16/3]$
- e)  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ ;  $[3(\pi/4 + 1/2)]$  f)  $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ;  $[a^2(\pi/2 - 1)]$
- g) kružnicou  $x^2 + y^2 = 5$ , jej dotyčnicou v bode  $A = (1, 2)$  a priamkou  $y = 0$ ;  $[5 - 2, 5\arcsin(2/\sqrt{5})]$
- h)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ;  $[a^2]$
- g)  $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$ ,  $a > 0$ .  $[5\pi a^2/8]$
6. Nájdite objemy telies ohraničených plochami:
- a)  $x - y + z = 6$ ,  $x + y = 2$ ,  $x = y$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;  $[16/3]$
- b)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $z = 0$ ,  $x + z = 6$ ;  $[48\sqrt{6}/5]$
- c)  $z = 4 - x^2 - y^2$ ,  $2z = 2 + x^2 + y^2$ ;  $[3/\pi]$
- d)  $2z = x^2 + y^2$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $[4\pi/3]$
- e)  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 2y$ ,  $z = 2y + x$ ,  $z = 0$ ;  $[3(\pi/2 - 1)/2]$
- f)  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x^2 + 2y^2$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x = 1$ ;  $[7/12]$
- g)  $z = x^2 + y^2$ ,  $z^2 = xy$ ;  $[\pi/96]$
- h)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ,  $x^2 + y^2 = 2 - z$ ;  $[7\pi/6]$
- i)  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$ ;  $[80\pi/3]$
- j)  $(x^2 + y^2 + z^2) = a^3 x$ .  $[\pi a^3/3]$
7. Vypočítajte obsah časti danej plochy:
- a)  $z = 2xy$ , ohraničenej rovinami  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 1$ ;  $[\pi/\sqrt{2}]$
- b)  $z = (x^2 + y^2)/2$ , ohraničenej rovinami  $x - y = 1$ ,  $x - y = -1$ ,  $x + y = 1$ ,  $x + y = -1$ ;  $[-2\pi/3 + 2\sqrt{2}(1 + (7 \ln 3)/4)/3]$
- c)  $z = xy$ , ohraničenej valcovou plochou  $x^2 + y^2 = a^2$ ;  $[2\pi((1 + a^2)^{3/2} - 1)/3]$
- d)  $x^2 - y^2 = z^2$ , ohraničenej rovinou  $y + z = a$  a ležiacou v prvom oktante;  $[a^2\sqrt{2}/2]$
- e)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ohraničenej valcovou plochou  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ;  $[a^2\sqrt{2}]$
- f)  $R^2 = x^2 + y^2$ , ohraničenej rovinami  $z = mx$  a  $z = nx$ ,  $m > n > 0$ ;  $[4(m - n)R^2]$
- g)  $ax = x^2 + y^2$ , ohraničenej plochou  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .  $[4a^2]$