7.5 Výpočet trojného integrálu

Nech σ_{xy} je elementárna oblasť v $\boldsymbol{R}^2$. Nech f_1, f_2 sú spojité funkcie dvoch premenných na oblasti σ_{xy}. Množinu všetkých bodov takých, že $(x,y) \in \sigma_{xy}$ a $f_1(x,y) \le z \ \le f_2(x,y)$ nazývame **elementárna oblasť v $\boldsymbol{R}^3$** a budeme ju označovať ω_{xyz}.

$$\omega_{xyz} = \{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 |\, a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x), f_1(x,y) \le z \ \le f_2(x,y)\}.$$

Podobne môžeme definovať elementárne oblasti ω_{xzy}, $\omega_{yxz}, \dots$.

Veta 7.4 *Nech funkcia f je integrovateľná na elementárnej oblasti ω_{xyz}. Nech pre každý bod $(x,y) \in \sigma$ existuje $\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$. Potom platí*

$$\iiint\limits_{\omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \Big[\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz\Big]dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b \Big\{ \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \Big[\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz\Big]dy\Big\}dx.$$

Výraz

$$\int\limits_a^b \Big\{ \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \Big[\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz\Big]dy\Big\}dx$$

nazývame **trojnásobným integrálom**. Používa sa tiež označenie

$$\int\limits_a^b \Big\{ \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \Big[\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz\Big]dy\Big\}dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Podobne môžeme postupovať pri výpočte trojných integrálov vzhľadom na oblasti $\omega_{yxz}, \omega_{xzy}, \dots$.