12 Príloha

12.1 Spojitosť, integrovanie a derivovanie radov funkcií

Veta 12.1 *Nech postupnosť spojitých funkcií* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *rovnomerne konverguje na* A *k funkcii* $f : A \to \mathbf{R}$. *Potom aj funkcia* f *je spojitá.*

Poznámka 12.1 *Podobne platí: Ak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *je rad spojitých funkcií na* A, *ktorý konverguje na* A *rovnomerne k funkcii* $s : A \to \mathbf{R}$, *tak aj funkcia* s *je spojitá.*

Veta 12.2 *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *je rad spojitých funkcií na* $\langle a, b\rangle$. *Nech rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje rovnomerne na* $\langle a, b\rangle$ *k funkcii* $s : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$. *Nech* $x_0 \in \langle a, b\rangle$. *Potom* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ *konverguje rovnomerne na* $\langle a, b\rangle$ *k funkcii* $S : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$, *kde* $S(x) = \int_{x_0}^{x} s(t)dt$.

Uvedený výsledok zapisujeme takto:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \right).$$

Hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ integrujeme po členoch.

Veta 12.3 *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *je rad spojito diferencovateľných funkcií na* $\langle a, b\rangle$. *Nech* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *a nech rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *je konvergentný. Ďalej nech rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ *rovnomerne konverguje na* $\langle a, b\rangle$ *k funkcii* $S : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$. *Potom rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje na* $\langle a, b\rangle$ *k funkcii* $s : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$ *a platí* $s' = S$.

12.1.1 Normovaný lineárny priestor

Z lineárnej algebry poznáme pojem lineárneho priestoru.

Definícia 12.1 *Lineárny priestor* V *nazývame normovaný, ak na* V *je definovaná norma, t. j. reálna funkcia* $\|\cdot\| : u \to \|u\|$ *týchto vlastností:*

(N 1) $\|u\| > 0$, *ak je* $u \neq 0$; $\|u\| = 0$ *vtedy a len vtedy, ak* u *je nulový prvok priestoru* V,

(N 2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ *pre* $u \in V$ *a každý skalár* α,

(N 3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *pre každé* $u, v \in V$.

Veta 12.4 *Funkcia* $\rho : V \times V \to \boldsymbol{R}$ *definovaná vzťahom*

$$\rho(u, v) = \|u - v\| \tag{1}$$

je metrikou na V.

Príklad 12.1 *V priestore $\mu(\boldsymbol{A})$ je definovaná norma takto*

$$\|f\| = \sup_{t\in\boldsymbol{A}} |f(t)|.$$

Príklad 12.2 *Nech $P^2(\langle a,b\rangle, \boldsymbol{R}) = P^2(a,b)$ je priestor po častiach spojitých funkcií $f : \langle a,b\rangle \to \boldsymbol{R}$. Potom*

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}.$$

Príklad 12.3 *V priestore reálnych štvorcových matíc sú dôležité nasledujúce normy pre $\boldsymbol{A} = (a_{ik})_{i,k=1}^n$:*
a) Riadková norma

$$\|\boldsymbol{A}\|_R = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \qquad \textit{(tzv. maximálny riadkový súčet).}$$

b) Stĺpcová norma

$$\|\boldsymbol{A}\|_S = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \qquad \textit{(tzv. maximálny stĺpcový súčet).}$$

c) Euklidovská norma

$$\|\boldsymbol{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}\ .$$

d) Spektrálna norma $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{|\lambda_{\max}|}$, kde $\lambda_{\max}$ je najväčšie charakteristické číslo matice $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

Nech u, v sú prvky lineárneho priestoru V so skalárnym súčinom $u \cdot v$, potom $\|\cdot\|$ pre každé $u \in V$ definujeme takto:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Príklad 12.4 *V lineárnom priestore $\boldsymbol{R}$ so skalárnym súčinom (**??**) normu $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \boldsymbol{R}^n$ definujeme takto:*

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Príklad 12.5 *V lineárnom priestore $P^2(a,b)$ platí*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}.$$

12.1.2 Normovaný lineárny priestor

Z lineárnej algebry poznáme pojem lineárneho priestoru.

Definícia 12.2 *Lineárny priestor V nazývame normovaný, ak na V je definovaná norma, t. j. reálna funkcia $\|\cdot\| : u \to \|u\|$ týchto vlastnosti:*

(N 1) $\|u\| > 0$, ak je $u \neq 0$; $\|u\| = 0$ vtedy a len vtedy, ak u je nulový prvok priestoru V,

(N 2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$ pre $u \in V$ a každý skalár α,

(N 3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *pre každé* $u, v \in V$.

Veta 12.5 *Funkcia* $\rho : V \times V \to \boldsymbol{R}$ *definovaná vzťahom*

$$\rho(u,v) = \|u - v\| \tag{2}$$

je metrikou na V.

Príklad 12.6 *V priestore* $\mu(\boldsymbol{A})$ *je definovaná norma takto*

$$\|f\| = \sup_{t \in \boldsymbol{A}} |f(t)|.$$

Príklad 12.7 *Nech* $P^2(\langle a,b \rangle, \boldsymbol{R}) = P^2(a,b)$ *je priestor po častiach spojitých funkcií* $f : \langle a,b \rangle \to \boldsymbol{R}$. *Potom*

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}.$$

Príklad 12.8 *V priestore reálnych štvorcových matíc sú dôležité nasledujúce normy pre* $\boldsymbol{A} = (a_{ik})_{i,k=1}^n$:

a) Riadková norma

$$\|\boldsymbol{A}\|_R = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \qquad \textit{(tzv. maximálny riadkový súčet).}$$

b) Stĺpcová norma

$$\|\boldsymbol{A}\|_S = \max_k \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \qquad \textit{(tzv. maximálny stĺpcový súčet).}$$

c) Euklidovská norma

$$\|\boldsymbol{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}\ .$$

d) Spektrálna norma $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{|\lambda_{\max}|}$, *kde* $\lambda_{\max}$ *je najväčšie charakteristické číslo matice* $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

Nech u, v sú prvky lineárneho priestoru V so skalárnym súčinom $u \cdot v$, potom $\|\cdot\|$ pre každé $u \in V$ definujeme takto:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

Príklad 12.9 *V lineárnom priestore* $\boldsymbol{R}$ *so skalárnym súčinom* (**??**) *normu* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \boldsymbol{R}^n$ *definujeme takto:*

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Príklad 12.10 *V lineárnom priestore* $P^2(a,b)$ *platí*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}.$$