14.4 Integrály

Príklad Vypočítajte objem telesa ohraničeného rovinami: $z=0, z=x+y, y=x, y=0, x=1$.

Riešenie. Priemetom daného telesa do roviny o_{xy} je oblasť $\sigma: 0\le x\le 1;\quad 0\le y\le x$. Objem daného telesa môžeme vypočítať pomocou dvojného integrálu

$$V=\iint_{\sigma} f(x,y)dxdy=\iint_{\sigma}(x+y)dxdy\,.$$

Tento integrál môžeme vypočítať pomocou dvojnásobného integrálu. Dostávame

$$V=\iint_{\sigma}(x+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x (x+y)dy\,.$$

Výpočet dvojnásobného integrálu môžeme urobiť pomocou MATLABu takto:

Zadanie v MATLABe:

```
>> syms x y v real
>> v=int(int(x+y,y,0,x),x,0,1)
```

Výsledok

k =

½

Príklad Vypočítajte objem telesa ohraničeného plochami: $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=2-x^2-y^2$.

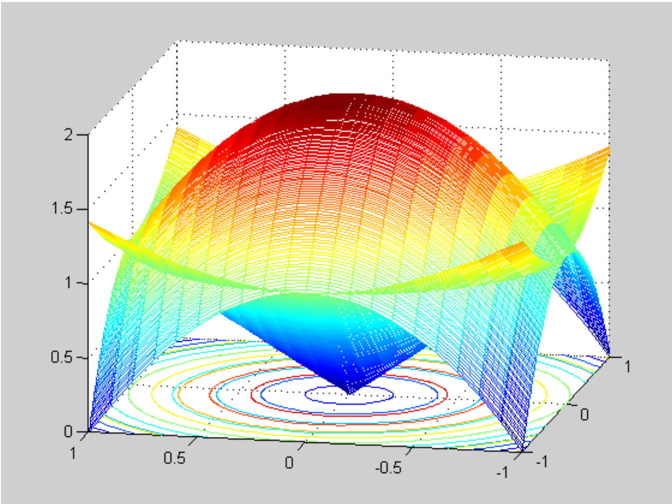
Riešenie. Objem môžeme vypočítať pomocou trojného integrálu s použitím cylindrických súradníc. Oblasť V ohraničujúcu dané teleso môžeme popísať takto:

$$V:\quad \begin{array}{l} 0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 1 \\ \rho\le z\le 2-\rho^2 \end{array}$$

$$V=\iiint_{\omega}\rho\, d\varphi\, d\rho\, dz\,.$$

Teda

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 d\rho\int_{\rho}^{2-\rho^2}\rho\, dz\,.$$



Zadanie v MATLABe:

```
>> syms phi rho z  real
>> V=int(int(int(rho,z,rho,2-rho^2),rho,0,1),phi,0,2*pi)
```

V = 5/6*pi

Graf daného telesa môžeme pomocou MATLABU zobraziť takto:

```
>> [x,y]=meshgrid(-1:0.025:1,-1:0.025:1);
>> z=2-x.^2-y.^2;
>> meshc(x,y,z);
>> hold on;
>> z=sqrt(x.^2+y.^2);
>> meshc(x,y,z);
>> hold off;
```

Príklad Vypočítajte hmotnosť telesa tvaru oblasti ohraničenej rovinami:
$z=0, z=x+y, y=x, y=0, x=1$, ak jeho objemová hustota je $\mu(x,y,z)=kz$.

Riešenie. Hmotnosť môžeme vypočítať pomocou trojného integrálu, kde

$$m=\iiint_{\omega}\mu(x,y,z)dxdydz .$$

Oblasť ω môžeme popísať pomocou nerovníc takt $\omega: 0\le x\le 1;\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le x+y$.
Potom

$$m=\iiint_{\omega}\mu(x,y,z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^{x+y}kzdz .$$

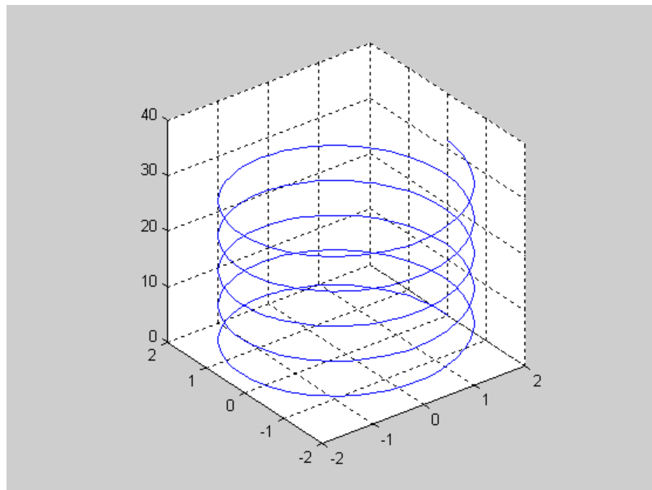
Uvedený trojnásobný integrál môžeme vypočítať pomocou MATLABu takto:
Zadanie v MATLABe:

```
>> syms x y z m k real
>> m=int(int(int(k*z,z,0,x+y),y,0,x),x,0,1)
```

Výsledok:

```
m =
7/24*k.
```

Príklad Vypočítajte hmotnosť drôtu tvaru krivky $\mathbf{r}(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$, $t\in\langle 0,10\pi\rangle$. Prierezová hustota drôtu je $\mu(x,y,z)=z$.



Riešenie. Hmotnosť drôtu vypočítame pomocou krivkového integrálu prvého druhu:

$$m=\int_l \mu(x,y,z)ds=\int_0^{10\pi}tds ,$$

kde $ds=\sqrt{(2\cos t)'^2+(2\cos t)'^2+(t)'^2}\,dt$.

Použitím MATLABU dostávame:

```
>> syms t real;
>> d=sqrt((diff(2*cos(t),t))^2+(diff(2*sin(t),t))^2+(diff(t,t))^2)
 d =
 (4*sin(t)^2+4*cos(t)^2+1)^(1/2)
 >> m=int(t*d,t,0,10*pi)
 m =
 50*pi^2*5^(1/2)
```