6.2 Riešenie niektorých diferenciálnych rovníc n-tého rádu

Nech $f \in C(I)$, $I = \langle a, b\rangle$ a $y^{(n)} = f(t)$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice nájdeme postupným integrovaním, teda

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} (\int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1)dx + c_2,$$

$$\dots$$

$$y' = \int_{x_0}^{x} (\dots \int_{x_0}^{x} (\int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1)dx + c_2)dx \dots)dx + c_{n-1},$$

$$y = \int_{x_0}^{x} (\int_{x_0}^{x} (\dots \int_{x_0}^{x} (\int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1)dx + c_2)dx \dots)dx + c_{n-1})dx + c_n.$$

Takto dostaneme všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice, ktoré v sebe zahŕňa všetky riešenia danej rovnice v danom intervale. Odtiaľ zároveň môžeme nájsť partikulárne riešenie danej rovnice vyhovujúce začiatočným podmienkam $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $\dots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Ďalej uvedieme postup pri riešení diferenciálnej rovnice typu

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad k \geq 1.$$

Zavedieme substitúciu $y^{(k)} = z$. Potom daná rovnica bude mať tvar

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0, \quad k \geq 1.$$

Táto rovnica je $(n-k)$-teho rádu. Ak vieme riešiť túto rovnicu, tak všeobecné riešenie je

$$z = g(x, C_1, \dots, C_{n-k}).$$

Vzhľadom na danú substitúciu je

$$y^{(k)} = g(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

čo je jeden z predchádzajúcich typov diferenciálnych rovníc, ktoré vieme riešiť postupným integrovaním.