## 6.4 Lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi

Nech je daná diferenciálna rovnica

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_n y = 0, \qquad (L1)$$

kde $a_i$, $i = 1, \ldots, n$ sú reálne konštanty. Budeme uvažovať $a_0 = 1$.

Riešenie rovnice $(L1)$ budeme hľadať v tvare $e^{rx}$. Platí veta:

**Veta 6.9** *Funkcia $e^{rx}$ je riešením diferenciálnej rovnice $(L1)$ vtedy a len vtedy, ak $r$ je koreňom rovnice*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0. \qquad (CH)$$

*Dôkaz.* Nech $y = e^{rx}$, potom $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, $\ldots$, $y^{(n)} = r^n e^{rx}$. Po dosadení do rovnice $(L1)$ a po úprave dostaneme rovnicu $(CH)$. Túto rovnicu nazývame **charakteristickou rovnicou diferenciálnej rovnice** $(L1)$ a jej korene **charakteristickými koreňmi diferenciálnej rovnice** $(L1)$. Ak korene charakteristickej rovnice sú reálne rôzne, tak platí veta:

**Veta 6.10** *Nech $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sú reálne charakteristické korene diferenciálnej rovnice $(L1)$ a navzájom rôzne. Potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je*

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}.$$

**Príklad 6.2** *Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice*
$y'' - 7y' + 12y = 0.$

*Riešenie.* Odpovedajúca charakteristická rovnica $r^2 - 7r + 12 = 0$ má korene $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{4x}$. Všeobecné riešenie je $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

Ak koreň $r_1$ je viacnásobný, tak podľa vety 6.10 vieme zostrojiť iba jedno riešenie odpovedajúce koreňu $r_1$. Ďalšie riešenia nájdeme podľa nasledujúcej vety:

**Veta 6.11** *Nech $r_1$ je $k$-násobným charakteristickým koreňom rovnice $(L1)$. Potom funkcie $e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_1 x}$ sú riešeniami diferenciálnej rovnice $(L1)$ a sú lineárne nezávislé.*

**Príklad 6.3** *Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice*
$y'' - 4y' + 4y = 0.$

*Riešenie.* Odpovedajúca charakteristická rovnica $r^2 - 4r + 4 = 0$ má dvojnásobný koreň $r = 2$, ktorému odpovedajú riešenia $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$. Všeobecné riešenie je $y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x}$.

Pre komplexné korene charakteristickej rovnice $(L1)$ platia vety:

**Veta 6.12** *Nech $z(x) = u(x) + iv(x)$ je komplexná funkcia reálnej premennej a nech je riešením $(L1)$. Potom riešením diferenciálnej rovnice $(L1)$ je reálna funkcia $u(x)$, ako aj reálna funkcia $v(x)$.*

**Veta 6.13** *Nech $r = \alpha + i\beta$ je $k$-násobným charakteristickým koreňom rovnice $(L1)$. Potom funkcie*

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \ldots, & x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \ldots, & x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

*sú lineárne nezávislé riešenia rovnice $(L1)$.*

**Príklad 6.4** *Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice*
$y'' - 2y' + 2y = 0.$

*Riešenie.* Odpovedajúca charakteristická rovnica $r^2 - 2r + 2 = 0$ má korene $r_{12} = 1 \pm i$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$. Všeobecné riešenie je $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$.