12.4 Geometrický význam derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej

Teraz sa budeme sa zaoberať geometrickým významom derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej. Predpokladajme, že funkcia f je analytická v bode $z_0 \in \boldsymbol{C}$ a nech $f'(z_0) \neq 0$. Deriváciu $f'(z_0)$ môžeme zapísať v tvare $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\varphi}$, kde $\varphi = \arg f'(z_0)$. Nech $\gamma : \langle a, b\rangle \to \boldsymbol{C}$, pričom pre nejaký bod $t_0 \in (a, b)$ je $\gamma(t_0) = z_0$, $\gamma'(t_0) \neq 0$. Nech krivka γ leží v nejakom okolí $O(z_0)$ bodu z_0, na ktorom má funkcia f deriváciu. Smerový vektor dotyčnice $S_\gamma(t_0)$ ku krivke γ v bode t_0 je $S_\gamma(t_0) = \gamma'(t_0)/|\gamma'(t_0)|$. Číslo $\alpha = \arg S_\gamma(t_0) = \arg \gamma'(t_0)$ udáva veľkosť uhla, ktorý zviera smerový vektor dotyčnice $S_\gamma(t_0)$ so smerovým vektorom kladnej časti reálnej poloosi v rovine z.

Nech zobrazenie $w = f(z)$ priradí bodu z_0 roviny z bod $w_0 = f(z_0)$ roviny w a krivke γ roviny z priradí krivku Γ roviny w, pričom $\Gamma(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0) = w_0$ a $\Gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0$. Smerový vektor dotyčnice ku krivke Γ má podobný význam v rovine w ako smerový vektor ku krivke γ v rovine z, pričom

$$S_\Gamma(t_0) = \frac{\Gamma'(t_0)}{|\Gamma'(t_0)|} = \frac{f'(z_0)}{|f'(z_0)|}\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}.$$

Nech $\beta = \arg S_\Gamma(t_0) = \arg \Gamma'(t_0)$, potom $\beta = \varphi + \alpha - 2k\pi$, kde celé číslo k zvolíme tak, aby bolo $\beta \in (-\pi, \pi\rangle$. Odtiaľ dostávame

$$\arg f'(z_0) = \arg S_\Gamma(t_0) - \arg S_\gamma(t_0) + 2k\pi.$$

Číslo $|z - z_0|$ udáva vzdialenosť bodov z, z_0 v rovine z a číslo $|f(z) - f(z_0)|$ vzdialenosť bodov $f(z), f(z_0)$ v rovine w. Ak $f'(z_0) \neq 0$, tak

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)||z - z_0|.$$

O geometrickom význame derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej hovorí veta:

Veta 12.6 *Nech funkcia f je analytická v bode $z_0 \in \boldsymbol{C}$ a nech $f'(z_0) \neq 0$. Potom*

- $\arg f'(z_0)$ *udáva veľkosť uhla, o ktorý je potrebné pootočiť smerový vektor dotyčnice ľubovoľnej krivky γ v bode t_0 na to, aby sme dostali smerový vektor dotyčnice krivky Γ v bode t_0 pri zobrazení $w = f(z)$;*
- $|f'(z_0)|$ *charakterizuje veľkosť dilatácie (predĺženia, skrátenia) vektora $z - z_0$ pri zobrazení $w = f(z)$ vzhľadom na vektor $f(z) - f(z_0)$ (nazýva sa aj* **koeficient dilatácie zobrazenia** *f v bode z_0).*

Uvažujme teraz v rovine z dve krivky γ_1, γ_2 podobných vlastností ako krivka γ v predchádzajúcom prípade. Bod z_0 je spoločným bodom týchto kriviek. Nech v zobrazení $w = f(z)$ im odpovedajú krivky Γ_1, Γ_2 v rovine w. Priesečníkom ich grafov je bod $w_0 = f(z_0)$.

Ak je funkcia f analytická v bode z_0 a $f'(z_0) \neq 0$, tak zobrazenie f zachováva veľkosti orientovaných uhlov, ktoré zvierajú krivky vychádzajúce z bodu z_0 (t. j. zachováva uhly z hľadiska veľkosti aj orientácie).

Definícia 12.3 *Hovoríme, že zobrazenie f na oblasti $\Omega \subset \boldsymbol{C}$ na oblasť $\Omega_1 \subset \boldsymbol{C}$ je* **konformné v bode** *$z_0 \in \Omega$ práve vtedy, keď je v bode z_0 spojité a zachováva uhly, ktoré v bode z_0 zvierajú krivky prechádzajúce týmto bodom.*

Hovoríme, že zobrazenie f je **konformné v oblasti** *$\Omega \subset \boldsymbol{C}$ práve vtedy, keď je* **injektívne a konformné v každom bode** *$z \in \Omega$.*

Ak funkcia $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}$ je analytická v oblasti $\Omega \subset D_f$, potom zobrazenie $w = f(z)$ je konformné v každom bode $z_0 \in \Omega$, v ktorom platí $f'(z_0) \neq 0$.

Nech funkcia $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ je analytická v oblasti $\Omega \subset \boldsymbol{C}$. Ukázali sme, že na oblasti Ω musia byť splnené Cauchy-Riemannove podmienky

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Po derivovaní prvej rovnosti podľa x a druhej podľa y dostávame

$$u_{xx} = v_{xy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Po sčítaní posledných dvoch rovníc dostaneme $u_{xx}+u_{yy} = 0$. Derivovaním prvej rovnosti podľa y a druhej podľa x po odčítaní dostaneme $v_{xx} + v_{yy} = 0$ pre ľubovoľný bod $(x,y) \in G$.

Definícia 12.4 *Hovoríme, že funkcia $F : \boldsymbol{R}^2 \supset \Omega \to \boldsymbol{R}$ je* **harmonická v oblasti** Ω *práve vtedy, keď má v oblasti Ω spojité parciálne derivácie druhého rádu a pre všetky $(x,y) \in \Omega$ platí*

$$\triangle F = F_{xx} + F_{yy} = 0,$$

t. j. v oblasti Ω vyhovuje Laplaceovej diferenciálnej rovnici.

Definícia 12.5 *Nech funkcie u, v sú harmonické funkcie v oblasti Ω. Hovoríme, že funkcie u, v sú* **združené harmonické funkcie** *v Ω práve vtedy, keď v oblasti Ω spĺňajú Cauchy-Riemannove podmienky.*

Veta 12.7 *Ak je funkcia $f = u + i\,v$ analytická v oblasti $\Omega \subset \boldsymbol{C}$, tak jej zložky $u : D_f \to \boldsymbol{R}$, $v : D_f \to \boldsymbol{R}$ sú* **združené harmonické funkcie** *v Ω práve vtedy, keď v oblasti Ω spĺňajú Cauchy-Riemannove podmienky.*