1.2 Niektoré vlastnosti číselných radov

Vyslovíme niektoré základné vlastnosti číselných radov.

Veta 1.1 *(Nutná podmienka konvergencie číselného radu) Ak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný, tak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dôkaz. Vieme, že $a_n = s_n - s_{n-1}$. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, potom aj $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Teda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ukázali sme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty,$$

pričom v oboch prípadoch je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Teda ak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný, tak nutne musí byť splnená podmienka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ale splnenie tejto podmienky nie je postačujúce pre konvergenciu radu.

Veta 1.2 *Nech k je prirodzené číslo. Potom rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ *buď súčasne obidva konvergujú alebo súčasne obidva divergujú.*

Rad $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ nazývame **zvyškom** radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ po k-tom člene.
Súčtom, resp. rozdielom radov $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ rozumieme rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, resp. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$.
Pod k-násobkom radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumieme rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n$.

Veta 1.3 *Nech rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvegujú a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$, $k \in \mathbf{R}$. *Potom* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = s - t$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n = ks$.

- **Absolútna a relatívna konvergencia radu**

Rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nazývame **radom absolútnych hodnôt** radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta 1.4 *Ak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergentný, tak je konvergentný aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Opačne tvrdenie neplatí: Konvergencia radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nezaručuje konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Definícia 1.3 *Ak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergentný, hovoríme, že rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* **absolútne konvergentný**.
Ak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný, ale rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je divergentný, hovoríme, že rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* **relatívne konvergentný**.

Veta 1.5 *(D'Alembertovo limitné podielové kritérium) Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečný rad a pre každé* $n \in \mathbf{N}$ *nech* $a_n \neq 0$.

a) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, *tak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

b) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, *tak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Veta 1.6 *(Cauchyho limitné odmocninové kritérium) Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečný rad.*

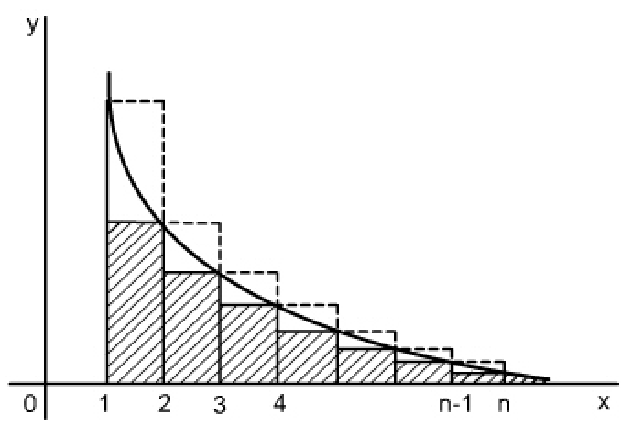
a) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolútne.*

b) Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Veta 1.7 *(Raabeho limitné kritérium) Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} [n(1 - |a_{n+1}/a_n|)] = p$, *pričom* $a_n \neq 0$. *Ak* $p > 1$, *rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konverguje. Ak* $p < 1$, *rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Veta 1.8 *(Cauchyho integrálne kritérium) Nech pre rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *existuje spojitá funkcia* f, *pre ktorú platí:*
1. $f(x)$ *je nerastúca na* $\langle K, \infty)$.
2. $f(n) = |a_n|$ *pre všetky* $n > K$.

Potom, ak existuje $\int\limits_K^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolútne konvergentný. Ak* $\int\limits_K^{\infty} f(x)dx = \infty$, *tak rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je divergentný.*



• **Rady s nezápornými členmi**

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad a pre každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n \geq 0$. Potom hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s **nezápornými členmi**.

Definícia 1.4 *Nech* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú rady s nezápornými členmi. Ak pre každé* $n \in \mathbf{N}$ *platí* $0 \leq a_n \leq b_n$, *hovoríme, že rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *je majorantným radom k radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Veta 1.9 *(Majorantné kritérium konvergencie) Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú dva rady s nezápornými členmi a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je majorantným radom k radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentný, tak aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný.*
Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný, tak aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je divergentný.*

Príklad 1.3 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *je konvergentný a je majorantný k radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. *Preto je aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *konvergentný.*

• **Rady so striedavými znamienkami**

Rad $$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$$
kde $a_n > 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$ nazývame radom so **striedavými znamienkami**.

Veta 1.10 *(Leibnizovo kritérium) Nech* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ $(a_n > 0)$ *je rad so striedavými znamienkami. Nech postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca a* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *je konvergentný.*

Poznámka 1.1 *Nech rad* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *je konvergentný. Ak namiesto súčtu tohto radu vezmeme jeho n-tý čiastočný súčet, dopustíme sa chyby, ktorá je v absolútnej hodnote menšia ako* a_{n+1} *(t.j. ako prvý zanedbaný člen).*

Preskúmajme konvergenciu radov $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Pre n-tý člen harmonického radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ukážeme, že tento rad diverguje: Pre $x > 0$ platí: $1 > \frac{1}{1+x}$, teda $\int_0^x dx > \int_0^x \frac{1}{1+x}dx$ t.j. $x > \ln(1+x)$. Na základe toho platí

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots > \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(1+n).$$

Teda $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1+n) = \infty$. To znamená, že harmonický rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentný. Rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ je rad so striedavými znamienkami a podľa Leibnizovho kritéria je konvergentný. Pretože rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konverguje, ale jeho rad absolútnych hodnôt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, je rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ relatívne konvergentný.