4.1 Euklidovský priestor

4.1.1 Vektorové priestory

V lineárnej algebre sme sa zoznámili s pojmom usporiadanej n-tice reálnych čísel, ktorú budeme označovať $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \boldsymbol{R}$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Množinu všetkých n-tíc reálnych čísel budeme označovať $\boldsymbol{R}^n$, teda

$$\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_i \in \boldsymbol{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Nech $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ a $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$ tak, že $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$. Pre takto definované operácie $+$ a $\cdot$ v Lineárnej algebre sme ukázali, že usporiadaná trojica $(\boldsymbol{R}^n, +, \cdot)$ je lineárny vektorový priestor nad $\boldsymbol{R}$. Prvky z $\boldsymbol{R}^n$ nazývame vektory a prvky z $\boldsymbol{R}$ skaláry.

Na množine $\boldsymbol{R}^n$ je definovaný **skalárny súčin** vektorov nasledujúcim spôsobom. Ak $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$, tak skalárnym súčinom vektorov $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ nazývame číslo

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{1}$$

Používa sa aj označenie $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ alebo $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$.

Množinu všetkých reálnych spojitých funkcií na $\langle a, b \rangle$ budeme označovať $C(a, b) = C(\langle a, b \rangle, \boldsymbol{R})$. Ak $f \in C(a, b)$, $g \in C(a, b)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ a $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ pre $x \in \langle a, b \rangle$, tak $(C(\langle a, b \rangle, \boldsymbol{R}), +, \cdot)$ je lineárny vektorový priestor nad $\boldsymbol{R}$. Skalárnym súčinom $\langle f, g \rangle$ nazývame číslo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx. \tag{2}$$

Nech $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^n$, resp. $C(a, b)$ a $k \in \boldsymbol{R}$, tak skalárny súčin definovaný vzťahmi (1),(2) má nasledujúce vlastnosti:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}, \\
(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}, \\
k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) &= (k\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}), \\
\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} &\geq 0, \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.
\end{aligned}$$

4.1.2 Metrické priestory

Každej dvojici x, y množiny reálnych čísel $\boldsymbol{R}$ môžeme priradiť reálne číslo $d(x, y) := |x - y|$, ktoré nazývame vzdialenosť bodu x od bodu y. Pomocou vzdialenosti množina $\boldsymbol{R}$ je vybavená (topologickou) štruktúrou (je definované okolie, otvorená množina – pozri Matematická analýza I), ktorá dovoľuje definovať limitu a spojitosť funkcie. Takouto štruktúrou však možno vybaviť ľubovoľnú neprázdnu množinu, ak pre každú dvojicu jej prvkov (bodov) je definovaná ich vzdialenosť.

Pojmom metriky na danej množine chceme vystihnúť čo najvšeobecnejšie vzdialenosť objektov, ktoré patria do danej množiny.

Definícia 4.1 *Nech $\boldsymbol{X}$ je neprázdna množina a zobrazenie $\rho : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{R}$ má tieto vlastnosti:*

Pre každé $x, y, z \in \boldsymbol{X}$ platí

1. $\rho(x, y) \geq 0$ *a* $\rho(x, y) = 0$ *práve vtedy, keď* $x = y$*,* *2.* $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

3. $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$, *tzv. trojuholníková nerovnosť.*

Potom hovoríme, že množina $\boldsymbol{X}$ *je metrický priestor s metrikou* ρ. *Číslo* $\rho(x,y)$ *nazývame vzdialenosťou bodov* x *a* y.

Množinu $\boldsymbol{X}$ *s metrikou* ρ *nazývame metrickým priestorom a označujeme ho* $(\boldsymbol{X},\rho)$.

Pre ľubovoľné body $u_1,u_2,\dots,u_k\in\boldsymbol{X}, k\in\boldsymbol{N}$ platí zovšeobecnená trojuholníková nerovnosť

$$\rho(u_1,u_k)\le\rho(u_1,u_2)+\rho(u_2,,u_3)+\cdots+\rho(u_{k-1},u_k).$$

Základným geometrickým pojmom, na ktorom spočíva tzv. všeobecná topológia (*náuka o polohe a usporiadaní geometrických útvarov v priestore*), je pojem *blízkosti.* Vo väčšine prípadov bude stačiť pojem blízkosti odvodený z metriky.

Kde nemôže dôjsť k nedorozumeniu, budeme často označovať metrický priestor $(\boldsymbol{X},\rho)$ samotným písmenom $\boldsymbol{X}$.

Môže sa stať, že na neprázdnej množine $\boldsymbol{X}$ je definovaných viac metrík. Napríklad ak $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{R}^2$

$$\rho_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

aj

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

sú metriky na množine $\boldsymbol{X}$. Teda $(\boldsymbol{X},\rho_1)$ a $(\boldsymbol{X},\rho_2)$ sú metrické priestory a sú to rôzne metrické priestory, hoci majú tú istú základnú množinu.

Keď $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{X}$, hovoríme, že $(\boldsymbol{A},\rho)$ je podpriestorom priestoru $(\boldsymbol{X},\rho)$ alebo, že topologická štruktúra na množine $\boldsymbol{A}$ je zdedenou od $(\boldsymbol{X},\rho)$.

Ďalej uvedieme niektoré príklady metrických priestorov:

Príklad 4.1 *V množine všetkých reálnych čísel* $\boldsymbol{R}$ *definujeme metriku* ρ_1 *vzťahom*

$$\rho_1(x,y)=|x-y|,\quad x,y\in\boldsymbol{R}. \tag{3}$$

Príklad 4.2 *Aritmetický n-rozmerný euklidovský priestor je množina* $\boldsymbol{R}^n$ *s metrikou* ρ_2 *definovanou vzťahom*

$$\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}, \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\boldsymbol{R}^n$.

Metrika ρ *zadaná vzťahom (4) sa nazýva euklidovská metrika.*

Príklad 4.3 *Označme* $\mu(\boldsymbol{A})$ *množinu všetkých ohraničených reálnych funkcií na množine* $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$. *Metrika daná vzťahom*

$$\rho_3(f,g)=\sup_{t\in\boldsymbol{A}}|f(t)-g(t)|$$

je tzv. suprémová metrika.

Ak $\boldsymbol{A}$ je neprázdna množina metrického priestoru $(\boldsymbol{X},\rho)$ a x,y sú body v priestore $(\boldsymbol{X},\rho)$, tak hovoríme, že reálne číslo

$$d(\boldsymbol{A})=\operatorname{diam}(\boldsymbol{A})=\sup\{\rho(x,y):x,y\in\boldsymbol{A}\}$$

je priemerom množiny $\boldsymbol{A}$.

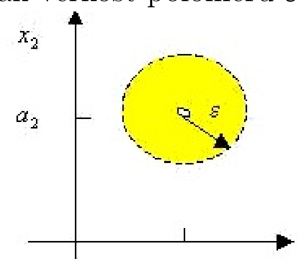
4.1.3 Základné metrické pojmy

Definícia 4.2 *Nech (X, ρ) je metrický priestor. Nech $a \in X$, $\varepsilon > 0$. Potom množinu*

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in X |\, \rho(x, a) < \varepsilon\}$$

nazývame **okolím** *bodu a (otvorenou guľou) s polomerom ε alebo ε-okolím bodu a (pri metrike ρ.) Množinu $\mathring{O}_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ nazývame* **prstencovým okolím** *bodu a.*
Množinu $S_\varepsilon(a) = \{x \in X |\, \rho(x, a) = \varepsilon\}$, kde $0 < \varepsilon < \infty$ budeme nazývať **sférou** *polomeru ε so stredom v bode a.*

Niekedy budeme písať iba $O(a)$ ak veľkosť polomeru ε nebude podstatná.



Poznámka 4.1 *Pri euklidovskej metrike je v $\boldsymbol{R}^2$*

$$\rho(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \varepsilon \tag{5}$$

a ε-okolím bodu a je otvorený kruh (t.j kruh bez ohraničujúcej kružnice) o polomere ε so stredom v bode $a = (a_1, a_2)$.

Ak použijeme nasledujúcu metriku

$$\rho_{\max}(x, a) = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < \varepsilon,$$

tzv. kubickú metriku, potom ε-okolím bodu $a = (a_1, a_2)$ bude vnútro štvorca so stredom v bode $a = (a_1, a_2)$ a uhlopriečkami rovnobežnými so súradnicovými osami.

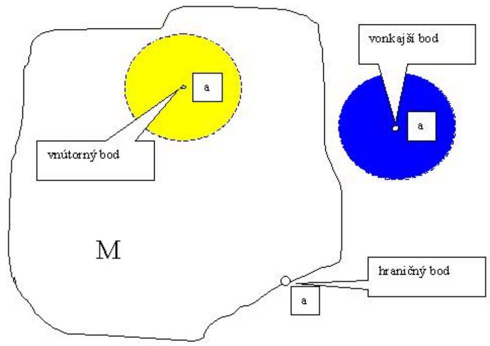
Definícia 4.3 *Nech P je metrický priestor a množina $M \subset P$, $a \in P$.*

1. *Bod a sa nazýva* **vnútorný bod** *množiny M, ak existuje okolie $O(a) \subset M$. Množinu všetkých vnútorných bodov nazývame* **vnútrom množiny** *M a označujeme ho M^0.*

2. *Bod a budeme nazývať* **vonkajší bod** *množiny M, vtedy ak existuje také okolie $O(a)$, že $O(a) \cap M = \emptyset$.*

3. *Bod a sa nazýva* **hraničný bod** *množiny M, ak každé okolie $O(a)$ obsahuje bod množiny M, aj bod, ktorý do M nepatrí. Množina všetkých hraničných bodov množiny M sa nazýva* **hranica** *množiny M.*

4. *Bod a sa nazýva* **bod uzáveru** *množiny M, ak každé okolie $O(a)$ má s M neprázdny prienik. Množina všetkých bodov uzáveru množiny M sa nazýva* **uzáver** *množiny M; označuje sa $\bar{M}$.*



Je zrejmé, že bod patrí do $\bar{M}$, ak je vnútorným bodom množiny M alebo hraničným bodom množiny M.

Body z $\bar{M}$ môžeme rozdeliť do dvoch skupín:

a) Každé okolie bodu a obsahuje aspoň jeden bod z M rôzny od bodu a (potom nutne každé okolie bodu a má s množinou M nekonečne mnoho spoločných bodov). V tomto prípade sa bod a nazýva **hromadný bod** množiny M. Hromadný bod nemusí byť bodom množiny M.

b) Existuje okolie $O(a)$ bodu a také, že $O(a) \cap M = \{a\}$. Bod a sa nazýva **izolovaný bod** množiny M a $a \in M$.

Poznámka 4.2 *Vzhľadom na definíciu hromadného bodu použitú v Matematickej analýze I, ak $M \subset \boldsymbol{R}$, tak môže byť hromadným bodom množiny M aj $-\infty$, resp. $+\infty$.*

Definícia 4.4 *Množina $M \subset P$ sa nazýva* **otvorená** *v priestore P, ak $M = M^o$. Množina M sa nazýva* **uzavretá** *v priestore P, ak $\bar{M} = M$.*

Teda otvorená množina je taká množina, ktorej všetky body sú vnútorné. Uzavretá je taká množina, ku ktorej patria všetky jej hromadné body (ak existujú).

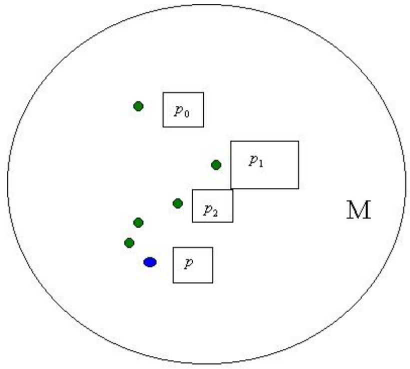
Množinu všetkých bodov $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ priestoru $\boldsymbol{R}^n$, ktorých súradnice spĺňajú nerovnosti $a_i \leq x_i \leq b_i$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, budeme nazývať **uzavretým intervalom** v priestore $\boldsymbol{R}^n$ a budeme ho označovať $J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$.

Majme otvorenú množinu A bodov priestoru $\boldsymbol{R}^n$. Zvoľme si $k \in \boldsymbol{N}$ od seba navzájom rôznych bodov $M_1, M_2, \ldots M_k$. Utvorme úsečky $M_1M_2, M_2M_3, \ldots,$ $M_{k-1}M_k$. Dostaneme tak lomenú čiaru, ktorá spája body M_1M_k. Ak každé dva body množiny $A \subset \boldsymbol{R}^n$ môžeme spojiť lomenou čiarou, ktorá celá leží v množine A, budeme množinu A nazývať **oblasťou**.

4.1.4 Konvergencia postupnosti v priestore

Pojem limity postupnosti v metrickom priestore definujeme podobne ako pri postupnostiach reálnych čísel.

Definícia 4.5 *Nech $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov v priestore (P, ρ). Hovoríme, že postupnosť $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ má* **limitu** *$p \in P$, ak k ľubovoľnému okoliu $O(p)$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ také, že pre všetky $n \in \boldsymbol{N}, n > n_0$ je $p_n \in O(p)$. Píšeme $p_n \to p$ alebo $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ v (P, ρ).*



Poznámka 4.3 *Pomocou metriky ρ a už známeho pojmu limity postupnosti čísel môžeme túto definíciu vyjadriť takto:*

$$p_n \to p \quad \text{v} \quad (P, \rho) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(p_n, p) = 0.$$

Konvergencia postupnosti v metrickom priestore má podobné vlastnosti ako konvergencia číselných postupnosti.

Veta 4.1 *Konvergencia postupnosti v metrickom priestore P má tieto vlastnosti:*

1. *Postupnosť $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ má najviac jednu limitu.*
2. *Ak $p_n \to p$, tak pre ľubovoľnú vybranú postupnosť $(p_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ platí $p_{n_k} \to p$.*
3. *Ak postupnosť $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje, tak je ohraničená (t. j. je ohraničená množina členov tejto postupnosti).*

   Naviac, ak P je normovaný lineárny priestor, platí:
4. *Ak $u_n \to u$, $v_n \to v$, tak $u_n + v_n \to u + v$.*
5. *Ak $u_n \to u$, $\alpha_n \to \alpha$, ($(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť čísel), tak $\alpha_n u_n \to \alpha u$.*

   Ak P je lineárny priestor so skalárnym súčinom, platí:
6. *Ak $u_n \to u$, $v_n \to v$, tak $u_n \cdot v_n \to u \ \cdot v$.*

Veta 4.2 *Množina M je uzavretá v priestore P práve vtedy, keď každá konvergentná postupnosť bodov z M má limitu z M.*

O konvergencii v $\boldsymbol{R}^m$ hovorí táto veta:

Veta 4.3 *Nech $p_n = (x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})$, $n = 1, 2, \ldots$, $p = (x_1, \ldots, x_m)$. Potom $p_n \to p$ v $\boldsymbol{R}^m$ práve vtedy, keď*

$$\lim_{n\to\infty} x_{in} = x_i \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, \ldots m$$

(tzv. konvergencia po súradniciach v $\boldsymbol{R}^m$).

Definícia 4.6 *Nech (P, ρ) je metrický priestor. Hovoríme, že postupnosť $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ bodov z P je* **cauchyovská** *v (P, ρ), ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ také, že pre všetky $n, m \in \boldsymbol{N}$,*

$$n \geq n_0, m \geq n_0, \quad \text{platí} \quad \rho(p_n, p_m) < \varepsilon.$$

Pre cauchyovské postupnosti platí:
a) Každá konvergentná postupnosť je cauchyovská.
b) Každá cauchyovská postupnosť je ohraničená.
c) Ak niektorá vybraná postupnosť z danej cauchyovskej postupnosti konverguje, tak aj daná postupnosť konverguje a majú rovnakú limitu.

Definícia 4.7 *Metrický priestor P sa nazýva* **úplný**, *ak každá cauchyovská postupnosť v P konverguje v P.*

Veta 4.4 *Euklidovský priestor $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geq 1)$ je úplný.*