11.2 Základné vlastnosti Laplaceovej transformácie

Pomocou vzťahu (**??**) môžeme nájsť

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad \text{pre} \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

Špeciálne pre $a = 0$ dostaneme obraz jednotkového predmetu $\eta(t)$.

Teraz uvedieme niektoré vlastností (LT), ktoré nám umožnia určiť obraz ku niektorým predmetom bez priameho výpočtu Laplaceovho integrálu.

Veta 11.2 *(veta o lineárnosti (LT)) Ak f_k sú predmety, F_k im odpovedajúce obrazy a $c_k \in \boldsymbol{C}$ sú ľubovoľné konštanty $k = 1, 2, \ldots, n$, tak*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p).$$

Vieme, že

$$\sin \omega t = \frac{1}{2\,i} e^{i\,\omega t} - \frac{1}{2\,i} e^{-i\,\omega t},$$

teda pomocou vety o lineárnosti (LT) dostávame

$$\sin \omega t \div \frac{1}{2\,i} \frac{1}{p - i\,\omega} - \frac{1}{2\,i} \frac{1}{p + i\,\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

kde $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$. Podobne dostaneme

$$\cos \omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

kde $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$.

Veta 11.3 *(veta o podobnosti) Nech f je predmet a F jeho obraz. Ak $\lambda \in \boldsymbol{R}$ je ľubovoľná kladná konštanta, tak*

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Veta 11.4 *(veta o tlmení) Ak f je predmet, F jeho obraz a $s \in \boldsymbol{C}$ je ľubovoľné číslo, tak*

$$e^{st} f(t) \div F(p - s).$$

Pomocou vety o tlmení a obrazov predmetov $\sin t$, $\cos t$ dostaneme

$$e^{at} \sin \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}, \quad e^{at} \cos \omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

kde $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im} \omega|$. Podobne

$$e^{at} \sinh \omega t \div \frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}, \quad e^{at} \cosh \omega t \div \frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2},$$

kde $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Re} \omega|$.

Veta 11.5 *Nech existujú reálne kladné konštanty* M, L, α *také, že pre ľubovoľné* $(t, \lambda) \in A = \langle 0, \infty) \times \langle 0, L \rangle$ *platí:* $|f(t, \lambda)| \leq Me^{\alpha t}$, $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda)| \leq Me^{\alpha t}$ *a nech funkcie* f *a* $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ *sú spojité na množine* A. *Ak* $f(t, \lambda) \div F(p, \lambda)$, *tak*

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda) \div \frac{\partial F}{\partial \lambda}(p, \lambda).$$

Pomocou uvedenej vety môžeme nájsť obraz napríklad ku predmetu $f(t) = t \cos \omega t$. Vieme, že

$$\sin \omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Derivovaním oboch strán podľa parametra ω dostaneme

$$t \cos \omega t \div \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Podobne môžeme nájsť obrazy ku predmetom $te^{\omega t}$, $t \sin \omega t$ a pod.

Teraz sa budeme zaoberať **posunutým predmetom predmetu** $f(t)$ o konštantu $\tau > 0$. V tomto prípade je nutné daný predmet vyjadriť pomocou jednotkového predmetu $\eta(t)$, teda $f(t)\eta(t)$. Posunutím jednotkového predmetu (vpravo-tzv. oneskorenie) o τ dostaneme predmet

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t \geq \tau. \end{cases}$$

Posunutím predmetu $f(t)\eta(t)$ vpravo (oneskorenie) dostaneme predmet

$$g(t) = f(t - \tau)\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Nech $0 < a < b$. Potom

$$\eta(t - a) - \eta(t - b) = \begin{cases} 0, & t < a, t > b, \\ 1, & t \in \langle a, b). \end{cases}$$

Funkcia $f(t)[\eta(t - a) - \eta(t - b)]$ nadobúda nulové hodnoty pre $t \in \boldsymbol{R} - \langle a, b)$ a pre $t \in \langle a, b)$ má tie isté hodnoty ako funkcia $f(t)$.

Veta 11.6 *(o posunutí, oneskorení predmetu) Ak predmetu* $f(t)$ *odpovedá obraz* $F(p)$ *a* $\tau > 0$, *tak*

$$f(t - \tau) \div e^{-\tau p} F(p).$$

Ak nemôže dôjsť k nedorozumeniu, tak namiesto $f(t - \tau)\eta(t - \tau)$ píšeme iba $f(t - \tau)$.

Veta 11.7 *(veta o obraze periodickej funkcie) Ak funkcia* f *je predmet s periódou* $T > 0$, *tak jej Laplaceov obraz je určený vzťahom*

$$F(p) = \frac{\int\limits_0^T f(t)e^{-pt} dt}{1 - e^{-Tp}}.$$

Ak posunieme graf funkcie $f(t)$ doľava o kladnú konštantu τ (hovoríme o predstihu), tak posunutý predmet bude $f(t+\tau)\eta(t)$ a nie predmet $f(t+\tau)\eta(t+\tau)$ (nebola by splnená podmienka, že predmet nadobúda nulové hodnoty pre $t < 0$).

Veta 11.8 *(veta o predstihu) Ak predmetu $f(t)$ odpovedá obraz $F(p)$ a $\tau > 0$, tak*

$$f(t+\tau)\eta(t) \div e^{\tau p}\left[F(p) - \int\limits_0^\tau f(t)e^{-pt}dt\right].$$

Ďalšie vlastnosti budeme môcť využiť pri riešení niektorých diferenciálnych rovníc.

Veta 11.9 *(veta o derivácii predmetu) Nech funkcia f a jej derivácia sú predmety a nech f je spojitá na intervale $(0,\infty)$. Ak $f(t) \div F(p)$, tak*

$$f'(t) \div pF(p) - f(0+),$$

kde $f(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} f(t)$.

Ak $f^{(k)}(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} f^{(k)}(t)$, $k = 0,1,\dots,n-1$ a $f^{(k)}$ sú predmety, tak

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1}f(0+) - \cdots - pf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+).$$

Príklad 11.1 *Nájdime obraz $F(p)$ k predmetu*
$f(t) = x''(t) - 2x'(t) + x(t) - 3 + g(t)$, *kde*

$$g(t) = \begin{cases} 0 \ \textit{pre}\ t < 0, \\ t \ \textit{pre}\ t \in (0,1), \\ 1 \ \textit{pre}\ t > 1 \end{cases}$$

a $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Riešenie. Nech predmetu $x(t) \div X(p)$, potom

$$x'(t) \div pX(p) - 1, \quad x''(t) \div p^2X(p) - 1p - 2.$$

Predmet $g(t)$ môžeme zapísať pomocou jednotkového predmetu takto

$$g(t) = t[\eta(t) - \eta(t-1)] + 1\cdot\eta(t-1) = t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1).$$

Už vieme, že $\eta(t) \div \frac{1}{p}$ a $t\eta(t) \div \frac{1}{p^2}$. Použitím vety o oneskorení dostaneme $(t-1)\eta(t-1) \div e^{-p}\frac{1}{p^2}$. Použitím vety o lineárnosti dostaneme

$$F(p) = p^2X(p) - p - 2 - 2[pX(p) - 1] + X(p) - 3\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}).$$

Veta 11.10 *(veta o integrovaní predmetu) Ak predmetu $f(t)$ odpovedá obraz $F(p)$, tak*

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \div \frac{F(p)}{p}.$$

Nech f je spojitý predmet na intervale $\langle 0,\infty)$ a $f(t) \div F(p)$. Ak existuje $\int\limits_0^\infty f(t)dt$, tak

$$\int\limits_0^\infty f(t)dt = \lim_{p\to 0} F(p).$$

Veta 11.11 *(veta o derivovaní obrazu) Ak predmetu $f(t)$ odpovedá obraz $F(p)$, tak predmetu*

$$-tf(t) \div F'(p).$$

Ako dôsledok tejto vety je $(-1)^n t^n f(t) \div F^{(n)}(p), n \in \boldsymbol{N}$.

Veta 11.12 *(veta o integrovaní obrazu) Nech $f(t) \div F(p)$. Ak existuje $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ a funkcia $\frac{f(t)}{t}$ je predmetom, tak*

$$\frac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^\infty F(z)dz.$$

Ak predmet $\frac{f(t)}{t}$ je spojitý na intervale $\langle 0, \infty)$, $f(t) \div F(p)$ a existuje integrál $\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt$, tak

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int\limits_0^\infty F(z)dz.$$

V ďalšom budeme hľadať predmet, ktorý odpovedá súčinu predmetov.

Definícia 11.3 Konvolúciou (alebo konvolučným súčinom) *predmetov f a g nazývame predmet h definovaný predpisom*

$$h(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Pre predmet h používame označenie $f * g$.

Pre konvolučný súčin dvoch predmetov f a g platí $f * g = g * f$.

Veta 11.13 *(veta o násobení obrazov) Ak f a g sú predmety s indexami rastu α_0^f a α_0^g, $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, tak konvolúcia $h = f * g$ je predmet s indexom rastu $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ a platí*

$$(f * g)(t) \div F(p)G(p).$$

Teda

$$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \div F(p)G(p).$$

Použitím vety o derivácii predmetu dostávame

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \div pF(p)G(p)$$

alebo

$$f(t)g(0+) + \int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \div pF(p)G(p).$$

Zároveň platí

$$f(t)g(0+) + (f * g')(t) = f(t)g(0+) + (g' * f)(t) \div pF(p)G(p).$$

Výrazy $f(t)g(0+) + (f * g')(t)$, $f(t)g(0+) + (g' * f)(t)$ nazývame **Duhamelove integrály**.

Veta 11.14 *(veta o násobení predmetov) Nech* f *a* g *sú predmety a nech* $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$*, kde* α_0^f*, resp.* α_0^g *je index rastu predmetu* f*, resp.* g*. Ak* $f(t) \div F(p)$*,* $g(t) \div G(p)$*, tak*

$$f(t)g(t) \div \frac{1}{2\pi\, i} \int\limits_{a-i\,\infty}^{a+i\,\infty} F(z)G(p-z)dz,$$

kde $\mathrm{Re}\, p > \alpha_0$*,* $\alpha_0 < a$ *(ide o integrál po krivke* $z = a + i\,t$*,* $t \in (-\infty, \infty)$*).*