10.3 Komplexná funkcia komplexnej premennej

Pojem komplexnej funkcie komplexnej premennej, tak ako aj pojem limity a spojitosti v komplexnom obore sa formálne nelíši od známych pojmov z funkcie reálnej premennej. V teórii komplexnej premennej sa stretávame aj s takými typmi funkcií, ktoré nie sú zobrazeniami definičného oboru do oboru hodnôt ako to bolo pri funkcii reálnej premennej (tzv. jednoznačné funkcie). Také funkcie môžu jednému bodu $z \in \boldsymbol{C}^*$ svojho definičného oboru priradiť niekoľko hodnôt $f(z)$ z oboru hodnôt. Množinu týchto hodnôt označme $\{f(z)\}$. V takom prípade ide o mnohoznačné (viacznačné) funkcie alebo multifunkcie, ako to bolo naznačené pri pojme $\operatorname{Arg} z$.

Komplexné čísla sú definované ako dvojice reálnych čísel (viď príloha). V súvislosti s týmto označením javí sa funkcia f komplexnej premennej ako funkcia dvoch premenných. Táto funkcia je definovaná na určitej množine všetkých dvojíc $(x, y) \in D_f \subset \boldsymbol{R}^2$, pričom komplexné číslo $z = x + i\,y$ je z oboru definície funkcie f komplexnej premennej a jej hodnota v dvojici (x, y) sa zhoduje s hodnotou $f(z)$.

Nasledujúca definícia funkcie (jednoznačnej funkcie) je podobná ako pri funkcii reálnej premennej.

Definícia 10.5 *Nech $A \subset \boldsymbol{C}^*$, $A \neq \emptyset$. Zobrazenie $f : A \to \boldsymbol{C}^*$ nazývame* **komplexnou funkciou komplexnej premennej**. *Množina A je definičným oborom funkcie f a označujeme ju D_f. Množinu $H_f = f(A) = \{w \in \boldsymbol{C}^* : \quad \exists\, z \in A, w = f(z)\}$ nazývame* **oborom hodnôt funkcie** f.

Funkcia je **konečná** *práve vtedy, keď $H_f \subset \boldsymbol{C}$. Ak $D_f \subset \boldsymbol{R}$, vtedy je f* **komplexná funkcia reálnej premennej**.

Nech $A \subset \boldsymbol{C}^*$, $A \neq \emptyset$. Predpisom f je na množine A definovaná mnohoznačná komplexná funkcia komplexnej premennej (multifunkcia) práve vtedy, keď je týmto predpisom každému $z \in A$ priradená neprázdna množina $\{f(z)\}$ hodnôt $f(z) \in \boldsymbol{C}^*$. Mnohoznačná funkcia f je konečná práve vtedy, keď $H_f \subset \boldsymbol{C}$.

Ak f je mnohoznačná funkcia, potom funkciu $\varphi : D_\varphi \to \boldsymbol{C}^*$ nazývame **jednoznačnou vetvou funkcie** f práve vtedy, keď platí

1. $D_\varphi \subset D_f$,
2. pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in \{f(z)\}$.

Viacznačnú funkciu f komplexnej premennej z možno definovať aj ako reláciu $f \subset \boldsymbol{C}^* \times \boldsymbol{C}^*$. Môžeme o nej uvažovať tiež ako o množine jednoznačných funkcií, ktoré sme nazvali vetvami. Jednu z nich obvykle považujeme za základnú a nazývame ju **hlavnou vetvou viacznačnej funkcie**.

Na geometrickú interpretáciu funkcie $w = f(z)$, $w = u + i\,v$, $zx + i\,y$ obyčajne používame dve roviny. V rovine z znázorňujeme nezávisle premennú (s osami o_x, o_y) a v rovine w závisle premennú (s osami o_u, o_v). Potom $u + i\,v = f(x + i\,y)$. Porovnaním reálnych a imaginárnych častí dostaneme, že $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ (reálna časť funkcie), $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ (imaginárna časť funkcie). Komplexná funkcia komplexnej premennej je teda určená dvojicou reálnych funkcií $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ a môžeme ju vyjadriť v tvare $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$.

Príklad 10.1 *Predpisom $w = f(z) = 1/z$, $z \in \boldsymbol{C} - \{0\}$ je definovaná jednoznačná funkcia, kde $D_f = \boldsymbol{C} - \{0\}$, $H_f = \boldsymbol{C} - \{0\}$, $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$, $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$.*

Príklad 10.2 *Predpisom* $w = f(z) = \sqrt{z}$, $z \in \boldsymbol{C}$ *je definovaná dvojznačná konečná komplexná funkcia komplexnej premennej, kde:* $H_f = \boldsymbol{C}$, $f(0) = 0$, $f(1) = \{1, -1\}$, $f(-1) = \{i, -i\}$, $f(i) = \{\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2\}$. *Jednoznačnou vetvou tejto funkcie je napríklad funkcia* F_1, *kde* $F_1(0) = 0$, $F_1(z) = \sqrt{|z|}\exp(\frac{i}{2}\arg z)$ *pre* $z \neq 0$, $u(x, y) = \sqrt{|z|}\cos(\frac{1}{2}\arg z)$, $v(x, y) = \sqrt{|z|}\sin(\frac{1}{2}\arg z)$ *pre* $z \neq 0$. *Podobne by sme určili* F_2.

Analogicky ako v reálnom obore definujeme pojmy ohraničenej, inverznej a zloženej funkcie.

Definícia 10.6 *Hovoríme, že funkcia* $f : \boldsymbol{C}^* \supset M \to \boldsymbol{C}^*$ *je* **ohraničená na množine** M *práve vtedy, ak existuje číslo* $K \in \boldsymbol{R}$, $K > 0$ *tak, že pre všetky* $z \in M$ *platí* $|f(z)| \leq K$, *t. j. ak je množina* $f(M)$ *ohraničená.*

Definícia 10.7 *Nech je daná funkcia* $f : \boldsymbol{C}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}^*$, $w = f(z)$,$H_f = \{w \in \boldsymbol{C}^* : w = f(z), z \in D_f\}$. *Funkciu* g *(vo všeobecnosti viacznačnú) definovanú na* $H_f \supset \boldsymbol{C}^*$ *nazývame* **inverznou funkciou k funkcii** f *a označujeme* f^{-1} *práve vtedy, keď každému* $w \in H_f$ *priraďuje práve tie* $z \in D_f$, *pre ktoré platí* $f(z) = w$. *Píšeme* $z \in \{f^{-1}(w)\}$.

Nech sú dané funkcie $f : \boldsymbol{C}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}^*$ a $g : \boldsymbol{C}^* \supset D_g \to \boldsymbol{C}^*$ a nech $H_g = g(D_g) \subset D_f$. Potom funkciu h definovanú na D_g predpisom: $w = f(g(z))$ nazývame zloženou funkciou s vnútornou zložkou g a vonkajšou zložkou f.

Poznámka 10.1 *V ďalších úvahách pod pojmom funkcia budeme rozumieť jednoznačnú funkciu. V prípade viacznačnej funkcie to bude vždy uvedené.*

Definícia 10.8 *Nech je daná funkcia* $f : \boldsymbol{C}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}^*$, z_0 *je hromadný bod množiny* M, $w_0 \in \boldsymbol{C}^*$. *Funkcia* f *má v bode* z_0 *limitu rovnajúcu sa číslu* w_0 *vzhľadom na množinu* M *práve vtedy, keď ku každému okoliu* $O_\varepsilon(w_0)$ *bodu* w_0 *existuje prstencové okolie* $\mathring{O}_\delta(z_0)$ *bodu* z_0 *tak, že* $f(\mathring{O}_\delta(z_0) \cap M) \subset O_\varepsilon(w_0)$ *a zapisujeme* $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0$.

Ak $M = D_f$ *a ak existuje ku každému okoliu* $O_\varepsilon(w_0)$ *bodu* w_0 *prstencové okolie* $\mathring{O}_\delta(z_0) \subset M$ *bodu* z_0 *tak, že* $f(\mathring{O}_\delta(z_0) \cap D_f) \subset O_\varepsilon(w_0)$, *ide o limitu funkcie* f *v bode* z_0 *a píšeme* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

Veta 10.3 *Nech funkcia* $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in \boldsymbol{C}$, $w_0 = u_0 + i\,v_0 \in \boldsymbol{C}$. *Potom* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *vtedy a len vtedy, keď*
$\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ *a* $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$.

Poznámka 10.2 *O limitách komplexných funkcií komplexnej premennej platia tvrdenia analogické vetám o limitách funkcií reálnej premennej.*

Spojitosť komplexnej funkcie komplexnej premennej definujeme podobne ako sme definovali spojitosť funkcie v reálnom obore.

Definícia 10.9 *Nech je daná funkcia* $f : \boldsymbol{C}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}^*$ *a nech* $M \subset D_f$, $z_0 \in M$. *Hovoríme, že funkcia* f **je spojitá v bode** z_0 **vzhľadom na množinu** M *práve vtedy, keď ku každému* $O_\varepsilon(f(z_0))$ *existuje okolie* $O_\delta(z_0)$ *bodu* z_0 *také, že* $f(O_\delta(z_0) \cap M) \subset O_\varepsilon(f(z_0))$. *Hovoríme, že funkcia* f *je* **spojitá na množine** M *práve vtedy, keď je spojitá vzhľadom na množinu* M *v každom bode množiny* M. *Ak* $M = D_f$ *a* z_0 *je vnútorný bod množiny* M, *ide o spojitosť funkcie* f *v bode* z_0.

Poznámka 10.3 *Ak z_0 je izolovaný bod množiny M, je funkcia f spojitá v bode z_0 vzhľadom na množinu M.*
Ak z_0 je hromadným bodom množiny M, tak funkcia f je spojitá v bode z_0 vzhľadom na množinu M práve vtedy, keď existuje $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = f(z_0)$.

Veta 10.4

- *Nech je daná funkcia $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Funkcia f je spojitá v bode $z_0 = x_0 + i\,y_0$ vtedy a len vtedy, keď funkcie $u : \boldsymbol{R}^2 \supset D_f \to \boldsymbol{R}$, $v : \boldsymbol{R}^2 \supset D_f \to \boldsymbol{R}$ sú spojité v bode (x_0, y_0).*
- *Nech sú v bode $z_0 \in M$ spojité funkcie $f : \boldsymbol{C}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}^*$, $g : \boldsymbol{C}^* \supset D_g \to \boldsymbol{C}^*$. Nech $k_1, k_2 \in \boldsymbol{C}$, $M \subset D_f \cap D_g$, potom v bode z_0 sú spojité vzhľadom na množinu M funkcie: $|f|$, $k_1\,f + k_2\,g$, $f \cdot g$, f/g, ak je v bode z_0 príslušná operácia definovaná.*
- *funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in M \subset D_f$ vtedy a len vtedy, keď pre každú postupnosť $(z_n) \subset M$ takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.*
- *Nech funkcia g je spojitá v bode $z_0 \in D_g$, funkcia f je spojitá v bode $w_0 = g(z_0)$ a nech $H_g \subset D_f$. Potom zložená funkcia $f(g(z))$ je spojitá v bode z_0.*