10.5 Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Pojem derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej sa zavádza podobne ako derivácia funkcie reálnej premennej, ale niektoré vlastnosti diferencovateľných komplexných funkcií komplexnej premennej sa od vlastností diferencovateľných funkcií reálnej premennej značne odlišujú.

Definícia 10.10 *Nech je daná funkcia $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}^*$ a nech z_0 je vnútorným bodom množiny D_f. Hovoríme, že funkcia f má v bode z_0* **deriváciu** *$f'(z_0)$ práve vtedy, keď existuje konečná limita*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Nezavádza sa pojem nevlastnej derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej a ani derivácia v bode ∞.

Veta 10.5 *Nech funkcie f, g majú v bode z_0 derivácie, potom*

- *funkcie f, g sú spojité v bode z_0,*
- *v bode z_0 majú deriváciu aj funkcie kf, $k \in \boldsymbol{C}$, $f + g$, $f \cdot g$ a platí $(kf)'(z_0) = kf'(z_0)$, $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$. Ak okrem toho je $g(z_0) \neq 0$, má v bode z_0 deriváciu aj funkcia f/g, pričom platí*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)},$$
- *ak má funkcia f deriváciu $f'(w_0)$ v bode $w_0 = g(z_0)$, potom má zložená funkcia $h(z) = f(g(z))$ deriváciu v bode z_0 a platí $h'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$,*
- *nech $f'(z_0) \neq 0$. Nech $f(z_0) = w_0 \in \boldsymbol{C}$ a nech existujú okolia $O_\delta(z_0)$, $O_\varepsilon(w_0)$ tak, že $f : O_\delta(z_0) \to O_\varepsilon(w_0)$ je vzájomne jednoznačné zobrazenie. Potom inverzné zobrazenie $f^{-1} : O_\varepsilon(w_0) \to O_\delta(z_0)$ má deriváciu v bode w_0 a platí $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ $(z_0 = f^{-1}(w_0))$.*

Pre derivovanie elementárnych funkcií komplexnej premennej platia podobné vzorce ako pri reálnych funkciách. Podobne ako pri funkcii reálnej premennej sa definujú tiež vyššie derivácie, diferencovateľnosť a diferenciál jednoznačnej komplexnej funkcie komplexnej premennej. Uvedieme vetu o nutnej podmienke existencie derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej.

Veta 10.6 *(nutná podmienka existencie derivácie) Nech je daná funkcia $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ a nech $z_0 = x_0 + i\, y_0$ je vnútorný bod množiny D_f. Nech funkcia f má deriváciu v bode z_0. Potom sú funkcie u, v diferencovateľné v bode (x_0, y_0) a platí*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Sú to tzv. **Cauchy-Riemannove podmienky***, kde u_x, u_y, v_x, v_y sú parciálne derivácie funkcií u, v.*

Ak sú splnené predpoklady poslednej vety, tak platí

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i\, u_y(x_0, y_0).$$

Veta 10.7 *(postačujúca podmienka existencie derivácie) Nech funkcie $u : \boldsymbol{R}^2 \supset D \to \boldsymbol{R}$, $v : \boldsymbol{R}^2 \supset D \to \boldsymbol{R}$ sú diferencovateľné v bode $(x_0, y_0) \in \boldsymbol{R}^2$, ktorý je vnútorným bodom D a nech v tomto bode vyhovujú Cauchy-Riemannovym podmienkam. Potom funkcia $f : \boldsymbol{C} \supset D \to \boldsymbol{C}$, $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ má deriváciu v bode $z_0 = x_0 + i\, y_0$.*

Poznámka 10.4

- *Funkcia* $f : \boldsymbol{C} \supset D_f \to \boldsymbol{C}$ *má vo vnútornom bode* $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in D_f$ *deriváciu práve vtedy, keď funkcie* $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$ *sú diferencovateľné v bode* (x_0, y_0) *a vyhovujú v ňom Cauchy-Riemannovym podmienkam.*

- *Nech funkcie* u, v *majú vo vnútornom bode* (x_0, y_0) *spojité parciálne derivácie 1. rádu a vyhovujú v ňom Cauchy-Riemannovym podmienkam. Potom funkcia* $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, *má deriváciu v bode* $z_0 = x_0 + i\,y_0$.

Definícia 10.11 *Hovoríme, že funkcia* f *je* **analytická (holomorfná)** *v bode* z_0 *vtedy a len vtedy, keď existuje okolie* $O(z_0)$ *bodu* z_0 *tak, že* f *má deriváciu na* $O(z_0)$. *Bod* $z_0 \in \boldsymbol{C}$ *nazývame* **regulárny**, *resp.* **singulárny** *bod funkcie* f *práve vtedy, keď funkcia* f *je, resp. nie je analytická v bode* z_0. *Hovoríme, že funkcia* f *je analytická na otvorenej množine* $G \subset \boldsymbol{C}$ *práve vtedy, keď je analytická v každom bode* $z \in G$.

Definícia 10.12 *Nech* $z_0 \in \boldsymbol{C}^*$ *je ľubovoľný daný bod. Bod* z_0 *sa nazýva* **izolovaný singulárny bod** *funkcie* f *vtedy a len vtedy, keď funkcia* $f : \boldsymbol{C}^* \supset D_f \to \boldsymbol{C}$ *je analytická v nejakom prstencovom okolí* $\mathring{O}(z_0) \subset D_f$ *bodu* z_0, *ale nie je analytická v bode* z_0. *Bod* z_0 *sa nazýva* **izolovaný singulárny bod** *funkcie* f.

Príklad 10.3 *Nájdime analytickú funkciu* f *na množine* $\Omega \subset \boldsymbol{C}$, *ak jej reálna časť je* $u(x, y) = 3x^2 - 3y^2 - 2xy + 2y$ *a* $f(0) = i$.

Riešenie. Pretože funkcia f je analytická na množine Ω, pre každý bod (x, y) musia platiť Cauchy-Riemannove podmienky. Dostávame $u_x = 6x - 2y = v_y$ (prvá podmienka). Odtiaľ dostaneme

$$v(x, y) = \int (6x - 2y)dy + \varphi(x) = 6xy - y^2 + \varphi(x),$$

kde φ je diferencovateľná funkcia. Odtiaľ použitím druhej Cauchy-Riemannovej podmienky je

$$v_x = 6y + \varphi'(x) = -(-6y - 2x + 2) = -u_y.$$

Čiže

$$\varphi'(x) = 2x - 2 \Rightarrow \varphi(x) = x^2 - 2x + k, \quad k \in \boldsymbol{R}.$$

Teda $v(x, y) = 6xy - y^2 + x^2 - 2x + k$ a

$$f(z) = 3x^2 - 3y^2 - 2xy + 2y + i\,(6xy - y^2 + x^2 - 2x + k) = (3 + i)z^2 - 2iz + i\,k.$$

Hodnotu konštanty k určíme z podmienky $f(0) = i$, t. j. $k\,i = i$. Teda $k = 1$.