6.3 Lineárne diferenciálne rovnice n-tého rádu

Nech $a_0, a_1, \dots, a_n$ a f je $n+2$ spojitých funkcií na intervale J a nech $a_0(x) \neq 0$ pre všetky $x \in J$. Pod **lineárnou diferenciálnou rovnicou** n-tého rádu s pravou stranou budeme rozumieť diferenciálnu rovnicu

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x). \tag{LP}$$

Diferenciálnu rovnicu

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{L}$$

budeme nazývať **lineárna diferenciálna rovnica bez pravej strany**.

Uvedieme niektoré základné vlastnosti diferenciálnej rovnice (L). Pre funkcie $y \in C^n(J)$ zavedieme tzv. lineárny diferenciálny operátor

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y.$$

Potom diferenciálnu rovnicu (L) môžeme zapísať v tvare $L(y) = 0$ a diferenciálnu rovnicu (LP) v tvare $L(y) = f(x)$.

Ak funkcia $\varphi \in C^n(J)$ a $L(\varphi(x)) = 0$ pre každé $x \in J$, tak $\varphi(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (L).

Veta 6.2 *Nech $y_1, \dots, y_k$ sú funkcie, ktoré majú prvých n derivácií na intervale J. Nech $c_1, \dots, c_k$ sú čísla. Potom*

$$L(c_1y_1 + \cdots + c_ky_k) = c_1L(y_1) + \cdots + c_kL(y_k).$$

Veta 6.3 *Nech $y_1, \dots, y_k$ sú riešenia diferenciálnej rovnice (L). Potom každá ich lineárna kombinácia je riešením diferenciálnej rovnice (L).*

Špeciálne pre $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ dostávame **nulové**, alebo **triviálne riešenie**.

Zavedieme pojem lineárnej závislosti a lineárnej nezávislosti funkcií. Nech $f_1, \dots, f_k$ sú reálne, resp. komplexné funkcie reálnej premennej, definované na intervale J. Budeme hovoriť, že tieto funkcie sú na intervale J **lineárne závislé**, ak existuje taká nenulová k-tica reálnych, resp. komplexných čísel $(c_1, \dots, c_k)$, že pre každé číslo $x \in J$ platí:

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_kf_k(x) = 0. \tag{1}$$

Ak niektoré z čísel $c_1, \dots, c_k$ je nenulové, ľahko sa dá ukázať, že funkcie $f_1, \dots, f_k$ sú na intervale J lineárne závislé vtedy a len vtedy, ak jedna z nich je lineárnou kombináciou ostatných. Ak funkcie $f_1, \dots, f_k$ nie sú na intervale J lineárne závislé, tak sú na tomto intervale **lineárne nezávislé**.

Ak funkcie $f_1, \dots, f_k$ majú na intervale J derivácie k-tého rádu, môžeme o lineárnej nezávislosti rozhodnúť pomocou **Wronského determinantu funkcií** (tiež **wronskián**) $f_1, \dots, f_k$

$$W(f_1, \dots, f_k) = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x), & \dots, & f_k(x) \\ f_1'(x), & f_2'(x), & \dots, & f_k'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \\ f_1^{(k-1)}(x), & f_2^{(k-1)}(x), & \dots, & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Veta 6.4 *Ak sú funkcie $f_1, \dots, f_k$ lineárne závislé na J, tak $W(f_1, \dots, f_k) = 0$ pre každé $x \in J$. Ak sa teda $W(f_1, \dots, f_k)$ nerovná nule aspoň v jednom čísle intervalu J, sú funkcie $f_1, \dots, f_k$ lineárne nezávislé na J.*

Príklady lineárne nezávislých funkcií:

a) Funkcie $1, x, x^2, \ldots, x^k$ sú nezávislé na každom intervale.

b) Nech $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sú navzájom rôzne komplexné čísla $(r_i \neq r_j)$ pre $i \neq j$. Funkcie $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_k x}$ sú lineárne nezávislé na každom intervale.

c) Nech r je komplexné číslo. Funkcie $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^k e^{rx}$ sú lineárne nezávislé na každom intervale.

d) Nech α, β sú reálne čísla a nech $\beta \neq 0$. Nech $k \in \boldsymbol{N}$. Funkcie
$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad xe^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \ldots, \quad x^k e^{\alpha x} \cos \beta x,$
$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad xe^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \ldots, \quad x^k e^{\alpha x} \sin \beta x,$
sú lineárne nezávislé na každom intervale.

6.3.1 Lineárna závislosť a nezávislosť riešení lineárnej diferenciálnej rovnice (L)

Veta 6.5 *Nech $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sú riešenia diferenciálnej rovnice (L). Ak je $k > n$, tak sú tieto riešenia lineárne závislé.*

Veta 6.6 *Existuje n riešení diferenciálnej rovnice (L), ktoré sú lineárne nezávislé.*

Systém n lineárne nezávislých riešení diferenciálnej rovnice (L) budeme nazývať jej **fundamentálnym systémom riešení**.

Veta 6.7 *Nech $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je fundamentálny systém riešení diferenciálnej rovnice (L). Potom každé riešenie diferenciálnej rovnice (L) sa dá napísať ako vhodná lineárna kombinácia riešení z tohto fundamentálneho systému.*

Nech $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je fundamentálny systém riešení rovnice (L), potom funkciu

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{2}$$

premenných $x, c_1, \ldots, c_n$ nazývame **všeobecným riešením diferenciálnej rovnice** (L).

Poznámka 6.3 *Každé riešenie diferenciálnej rovnice (L) dostaneme z jej všeobecného riešenia, ak za $c_1, \ldots, c_n$ dosadíme vhodné čísla.*

Zníženie rádu lineárnej diferenciálnej rovnice

Nech $\varphi(x)$ je riešením diferenciálnej rovnice (L) a pre každé $x \in J$ je $\varphi(x) \neq 0$. Použitím substitúcie $y = \varphi \int z dx$ dostaneme diferenciálnu rovnicu rádu $n-1$. Ukážeme si tento postup na diferenciálnej rovnici druhého rádu. Potom

$$y' = \varphi'(x) \int z dx + \varphi(x) z,$$

$$y'' = \varphi''(x) \int z dx + 2\varphi'(x) z \ + \varphi(x) z'.$$

Dosadením do diferenciálnej rovnice (L) dostaneme

$$a_0[\varphi''(x) \int z dx + 2\varphi'(x) z \ + \varphi(x) z'] + a_1[\varphi'(x) \int z dx + \varphi(x) z] + a_2 \varphi \int z dx = 0.$$

Po úprave je

$$[a_0\varphi''(x)]z' + [2a_0\varphi'(x) + a_1\varphi(x)]z + [a_0\varphi''(x) + a_1\varphi'(x) + a_2\varphi(x)]\int z dx = 0.$$

Výraz v poslednej hranatej zátvorke je rovný nule, pretože φ je riešením danej diferenciálnej rovnice, teda dostávame rovnicu

$$[a_0\varphi''(x)]z' + [2a_0\varphi'(x) + a_1\varphi(x)]z = 0$$

čo je diferenciálna rovnica prvého rádu. Nech jej riešenie je $z = \psi(x)$. Potom všeobecné riešenie pôvodnej rovnice je

$$z = C_1\varphi(x) + C_2\varphi(x)\int \psi(x)dx.$$

Príklad 6.1 *Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice* $y''-4y'+4y = 0$, *ak poznáme jedno jej riešenie* $y_1 = e^{2x}$.

Riešenie. Použitím substitúcie $e^{2x}\int z(x)dx$, po úprave dostaneme $e^{2x}z' = 0$. Riešením tejto rovnice je napríklad $z(x) = 1$. Potom riešenie pôvodnej rovnice $y_2 = e^{2x}\int 1 \cdot dx = xe^{2x}$. Všeobecné riešenie je $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou

Budeme sa zaoberať diferenciálnou rovnicou (LP).

Veta 6.8 *Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice* (LP) *(s pravou stranou) na intervale* J *je súčet jej ľubovoľného riešenia a všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice* (L) *(rovnice bez pravej strany).*

Pri riešení diferenciálnej rovnice (LP) môžeme postupovať takto:
1. Riešime príslušnú diferenciálnu rovnicu (L) (bez pravej strany). Nájdeme jej všeobecné riešenie $y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$.
2. Nájdeme jedno riešenie diferenciálnej rovnice (LP) (s pravou stranou) y^*.
3. Potom všeobecné riešenie rovnice (LP) je

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n + y^*.$$

Ďalej ukážeme, že ak vieme riešiť diferenciálnu rovnicu (L), tak vieme riešiť aj diferenciálnu rovnicu (LP). Metóda, pomocou ktorej môžeme nájsť riešenie rovnice (LP) je **Lagrangeova metóda variácie konštánt**.
Ukážeme postup pre diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Nech

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

je riešením diferenciálnej rovnice

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0,$$

potom je

$$a_0y_i''(x) + a_1y_i'(x) + a_2y_i(x) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Hľadajme také funkcie $c_1(x), c_2(x)$, že funkcia

$$y^*(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2$$

bude riešením diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = f(x).$$

Potrebujeme dve rovnice na určenie funkcií $c_1(x), c_2(x)$. Vypočítajme deriváciu $y^{*\prime}$:

$$y^{*\prime} = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x).$$

Prvá rovnica nech je

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

pre každé $x \in J$. Potom

$$y^{*\prime\prime}(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''.$$

Po dosadení do danej diferenciálnej rovnice a vzhľadom na to, že funkcie y_1, y_2 sú riešeniami diferenciálnej rovnice bez pravej strany je

$$a_0[c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)] = f(x),$$

čo je druhá potrebná rovnica na výpočet neznámych funkcií $c_1(x), c_2(x)$. Keby sme zachovali podobný postup pre diferenciálnu rovnicu n-tého rádu, tak by sme dostali sústavu

$$\begin{aligned}
c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = {} & 0, \\
c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = {} & 0, \\
\cdots \quad & \cdots, \\
a_0[c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)] = {} & f(x).
\end{aligned}$$

Je to systém rovníc, ktorý má práve jedno riešenie (wronskián je nenulový). Riešenie danej sústavy môžeme potom zapísať v tvare $c_i'(x) = \varphi_i(x)$ a po integrovaní dostaneme $c_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$, $i = 1, \ldots, n$. Teda

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \varphi_i(x)dx.$$